GEOMETRIJSKI SANGAKU PROBLEMI

Cicvarić, Ana

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FILOZOFSKI FAKULTET

DIPLOMSKI RAD

GEOMETRIJSKI SANGAKU PROBLEMI

ANA CICVARIĆ

Split, 2023.

Odsjek: Učiteljski studij

Studij: Integrirani preddiplomski i diplomski učiteljski studij

GEOMETRIJSKI SANGAKU PROBLEMI

Studentica:
Ana Cicvarić

Mentorica:
dr. sc. Nives Baranović, v. pred.

Split, rujan 2023.

Sadržaj

1. Uvod

U ovom radu aktualiziraju se geometrijski problemi nastali u davnoj prošlosti japanskoga naroda, oslikani na *sangaku* pločama, a koji su zadnjih godina sve više dostupni kroz internetske stranice svakome tko želi ući u taj "skriveni" svijet. *Sangaku* su zavjetne matematičke ploče na kojima su ispisivani matematički, posebno geometrijski problemi. Postavljane su pod strehe svetišta i hramova u znak zahvalnosti bogovima za uspješno riješene matematičke probleme, ali i kao znak molitve za što uspješniji nastavak rada na drugim matematičkim problemima. Upravo zbog unikatnosti njihovih kreacija, sangaku ploče spadaju pod umjetnička djela i sakralne predmete, a također i u zapise matematičkih dostignuća određenih razdoblja japanske povijesti.

Na samom početku ovoga rada daje se kratki povijesni pregled nastanka sangaku ploča, a u drugom se poglavlju opisuje njihov sadržaj i struktura te se posebno ističu tri japanska teorema. Sangaku tradicija smatra se potpuno jedinstvenim aspektom japanske kulture, a posebno je zanimljivo što ne postoji ništa slično sangaku-u u svijetu. Upravo iz tog razloga, sangaku je važan dio svjetske kulturne baštine.

U središnjoj temi ovoga rada opisuje se sedam odabranih geometrijskih sangaku problema. Uz vizualni prikaz, opis i detaljan prikaz rješenja, za svaki sangaku problem prikazana je geometrijska konstrukcija i njezin opis po koracima. Konstrukcija problema nije izvorno sadržana na sangaku pločama već je dodatni sadržaj uveden u ovom radu. Cilj je bio ne samo prepričati neku priču, već odabrane probleme i njihove konstrukcije prikazati na način kako bi se mogli koristiti u nastavi. Time se ovim radom osigurava dodatni nastavni materijal za primjenu u matematičkom obrazovanju na svim razinama: u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj nastavi matematike, ali i na sveučilišnoj razini.

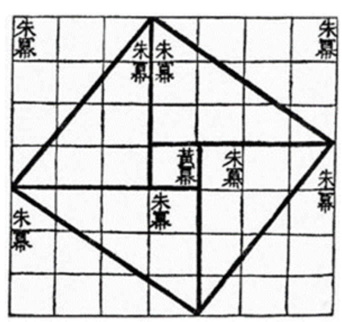
S obzirom na strukturu i način obrade sangaku problema, postupnost i sistematičnost obrade, rad može poslužiti kao korisno polazište ne samo učiteljima matematike već i svima onima koji se odluče na istraživanje geometrijskih sangaku problema, u nadi da će motivirati istraživanje i nekih drugih, možda složenijih problema.

2. Sangaku (算額)

2.1. Edo razdoblje

O japanskoj matematici do 7. stoljeća nema mnogo podataka, poznato je tek da u 7. stoljeću iz Kine u Japan počinju pristizati prvi matematički spisi o računanju, algebri i geometriji. Iako matematička znanja u Japan dolaze iz Kine, matematika nije odmah pronašla svoje mjesto u znanosti pa dolazi do stagnacije matematičke misli. Razdoblje šogunata Ashikaga poznato je kao mračno doba znanosti Japana, a trajalo je oko dvjesto pedeset godina. To razdoblje obilježeno je ratnim sukobima među klanovima koji su se borili za prevlast i samim time pustošili zemlju i onemogućili razvoj znanosti. Tokugawa Ieyasu odnosi veliku pobjedu porazivši Hideyorija, što rezultira ujedinjenjem Japana. Tokugawu car proglašava šogunom, a sjedištem šoguna postaje provincijski grad Edo, današnji Tokio, po kojem je ovo važno razdoblje povijesti Japana dobilo ime. Razdoblje Edo karakteriziraju mir i samonametnuta izolacija Japana u trajanju od dvjesto pedeset godina, a upravo je sangaku tradicija obilježila Edo razdoblje. Naime, matematika je dobila uporište u japanskoj kulturi prikazivanjem matematičkih sadržaja na lijepo oslikanim drvenim pločama, sangaku pločama, postavljenim na mjesta bogoštovlja (Kabić, 2012).

Chou Pei Suan Ching, u prijevodu Aritmetički klasici, jedan je od najstarijih i najpoznatijih kineskih matematičkih tekstova koji je imao najveći utjecaj na japansku matematiku toga vremena. *Chou Pei Suan Ching* nastao je između 500. i 300. godine prije Krista, a riječ je o 256 riješenih problema. Također, u njoj se nalazi Gougu teorem, odnosno vizualni dokaz Pitagorina poučka (Slika 1.) za slučaj $a=3,\ b=4$ i $c=5$ (Kabić, 2012).



Slika 1. *Gougu teorem*

2.2. Sangaku (算額) - matematičke ploče

Najjednostavniji, doslovan prijevod japanske riječi *sangaku* znači *matematička ploča*. Kada se uđe u analizu sadržaja tih ploča dolazi se do preciznijeg značenja. Naime sangaku je izvorno složenica riječi *san*, što označava račun ili izračun, odnosno aritmetiku i riječi *gaku* što na japanskom jeziku znači znanost ili učenje. Drugim riječima, sadržaji sangaku ploča su razni matematički problemi, kraće *sangaku problemi,* koje su japanski matematičari, odnosno učitelji i učenici samurajskih škola, ali i običan narod, ispisivali na drvenim pločama, s posebnom pozornošću i pažnjom ukrašavali, a zatim ih postavljali pod krovišta šintoističkih svetišta i budističkih hramova. Prema načinu prikaza i mjestu izlaganja sangaku problema, na Zapadu se oni često nazivaju *Geometrijski problemi u Japanskim hramovima* (Slika 2.).

Slika 2. Svetište Kaizu Tenman, sangaku ploča iz 1875. pod krovištem hrama

Autori sangaku-a u početku su se koristili starokineskim jezikom, *kanbunom*. Kanbun je u Japanu ono što je latinski jezik na Zapadu: jezik kojim se koristio samo visokoobrazovani dio stanovništva. Sangaku je bio kulturni fenomen Japana *toga doba*, slabije poznat ostatku svijeta, ali jako važan dio svjetske kulturne baštine. Sangaku ploče su unikatne kreacije jer su istovremeno i umjetnička djela i sakralni predmeti, ali i originalna matematička dostignuća određenog razdoblja (Kabić, 2012). Na sangaku pločama rijetko su se davala objašnjenja ili dokazi sangaku problema, vjerojatno zbog ograničenosti prostora, ali i kako bi čitatelji bili izazvani da do rješenja problema dođu sami. Najstarija sačuvana Sangaku ploča potječe iz 1683. godine, a pronađena je u Tochigi prefekturi (Katsuhito, 2017). Prema Makishitau, osim te, sačuvano je tek oko 900 ploča i nekoliko rukom pisanih zbirki Sangaku problema s početka 19. stoljeća, dok su ostale oštećene vremenom ili uništene požarima i ratovima. Prema Katsuhito, 2005. godine pronađeno je pet ploča u prefekturi Toyama, što ukazuje na činjenicu da još uvijek postoje neotkrivene sangaku ploče.

2.3. Religije Japana i sangaku problemi

Japan je država s dvjema dominantnim religijama. Uz japanski šintoizam, budizam je također postao dominantnom religijom kada je u 7. stoljeću stigao u Japan iz Kine. Budistički su hramovi bili središta učenja, dok su se u šintoističkim svetištima održavali tradicionalni japanski festivali i rituali (Katsuhito, 2017). Po narodnim je vjerovanjima božica Kama, koja ujedinjuje više od 800 božanstava, voljela konje pa su joj ih stoga Japanci koji su bili u mogućnosti poklanjali. S druge strane, oni Japanci koji nisu bili u mogućnosti pokloniti konja, božici Kami su poklanjali sliku konja na drvenoj ploči kao zavjetni dar ili kao zahvalu bogovima. Slike konja na drvenim pločama postavljane su pod strehe svetišta, kao i sangaku ploče pa stoga jedni tvrde da su sangaku također zavjetne ploče darivane šintoističkim svetištima i budističkim hramovima u znak pobožnosti, molitve ili zahvale budući da su u nedostatku nadahnuća nekada znale proći i dvije godine u rješavanju određenih sangaku problema (Kabić, 2012). Šintoistička svetišta u Japanu poznata su kao *Ema*. *E* znači slika, a *ma* znači konj pa se iz toga može povezati darivanje slika konja kao zavjetni dar i postavljanje sangaku ploča na ista mjesta (Fameli, 2020). U to vrijeme nije bilo mnogo privatnih škola pa je razumljivo da su učitelji osjećali potrebu zahvaliti se bogovima na matematičkim otkrićima pripadnika njihovih škola. Drugi mogući razlog postavljanja sangaku ploča pod strehe svetišta i hramova (Slika 3.) je što u to vrijeme nije bilo sveučilišta u Japanu pa su tako šintoistička svetišta i budistički hramovi bili središta znanja (Kabić, 2012). Sličan običaj s pločicama zahvale uvriježen je i u nekim dijelovima Hrvatske, kao na primjer kamene pločice – zahvalnice u Kamenitim vratima. (Devidé, 2010).

Slika 3. Svetiše Takemizuwake, Nagano Prefektura

2.4. Wasan i Yosan

Bogatstvo stvaralaštva japanskih geometričara začuđujuće je s obzirom na njihovu odcijepljenost od ostatka svijeta. Iz sadržaja sangaku ploča vidljivo je da su Japanci poznavali neke geometrijske tvrdnje puno prije no što su otkriveni na Zapadu. Matematika koja je nastala u Japanu tijekom Edo razdoblja naziva se *Wasan* (和) (wa – japanski, san – izračun), što u prijevodu znači *japanska matematika*, dok zapadnjačku matematiku Japanci nazivaju *Yosan* (洋算). Smatra se da je *Wasan* nastao 1627. godine objavom knjige *Jinkoki*, u prijevodu Mali i veliki brojevi, autora Yoshide Mitsuyoshija (Slika 4.). Djelo *Jinkoki* najutjecajnija je knjiga za matematičko obrazovanje u Japanu toga doba, a bila je i sinonim za aritmetiku. U njoj su dani i primjeri iz svakodnevnog života u Japanu toga vremena te se vježbalo računanje na sorobanu, odnosno na japanskoj inačici abakusa (Katsuhito, 2017).

Slika 4. *Jinkoki* - Mali i veliki brojevi

Jedan od najvećih matematičara Edo razdoblja je Seki Takakazu (Seki Kōwa, Slika 5.). Živio je od oko 1642. do 1708. godine, a za svoga života razvio je određene matematičke vještine i koncepte te došao do određenih matematičkih spoznaja prije svojih suvremenika matematičara na Zapadu po kojima su određene metode i pravila dobila ime. Seki Takakazu bavio se problemima iz različitih područja matematike, a najznačajnije Takakazuovo otkriće bio je princip kruga – Enri (*Yenri*). U početku se ta metoda koristila u računanju površine kruga, a kasnije ju je Seki poopćio i koristio za računanje površina likova omeđenih raznim krivuljama (Fameli, 2020).

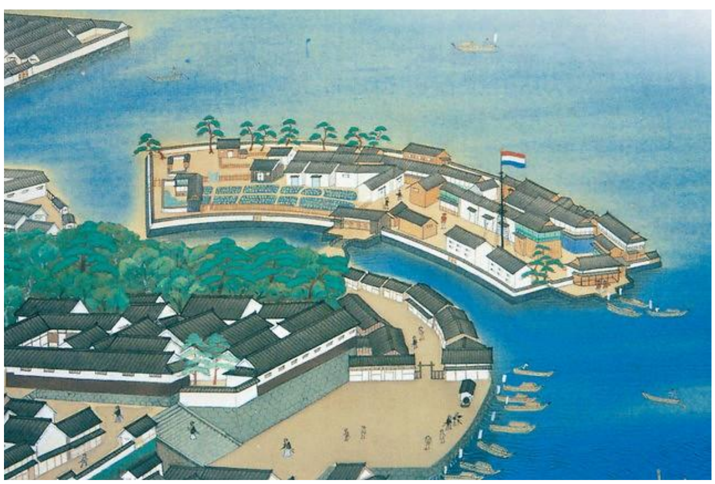
Slika 5. Matematičar Seki Takakazu

Tijekom 20. stoljeća sangaku problemima se nije posvećivalo previše pozornosti, ali gledajući internetske stranice u današnje vrijeme može se vidjeti da su oni danas itekako aktualni i to zahvaljujući nekim od nastavnika i učitelja matematike koji su te probleme aktualizirali obilazeći svetišta i hramove diljem Japana te pišući o tome. Između ostaloga, jedan od poznatijih je srednjoškolski nastavnik Hidetoshi Fukagawa koji ponovno obnavlja sjećanje na sangaku probleme objavljujući o njima u časopisima i knjigama. Danas se može na internetu pronaći mnoštvo sangaku problema, ali i onih problema koji su im nalik, što upućuje da se mnogi njima bave, dok se dio njih vrlo vjerojatno koristi i u nastavi. Iz navedenog je vidljivo da su sangaku problemi itekako aktualni i nakon tri stoljeća (Vincent & Vincent, 2004).

Hidetoshi Fukagawa obilazio je svetišta i hramove diljem Japana kako bi otkrio i sačuvao sve postojeće ploče, a opisao je i svoj prvi susret sa sangaku-om 1969. godine: učitelj japanske književnosti zamolio ga je da dešifrira knjigu iz 1815. godine, otisnutu na drvene blokove. To nam daje naslutiti kako je tradicionalna japanska matematika, *wasan*, koja je nekada cvjetala u Edo razdoblju, u 20. stoljeću bila gotovo zaboravljena (Kabić, 2012).

2.5. Sakoku i Genroku

Razdoblje japanske povijesti, nazvano *Sakoku*, označavalo je zatvorenu zemlju. Tijekom tog razdoblja nije bilo razmjene materijalnih dobara, kulture niti bilo kakvih informacija između Japana i ostatka svijeta, čime Japan postaje potpuno izoliran otok. Razdoblje Sakoku je također poznato i pod nazivom "Veliki mir" upravo zbog razdoblja samoće koja je nastupila uslijed samonametnute izolacije Japana: strancima je bilo zabranjeno ulaziti u Japan, a Japanci nisu smjeli napuštati svoju zemlju. Kršenje nametnutih odredbi rezultiralo bi smrtnom kaznom. Razdoblje samonametnute izolacije *Sakoku* završilo je 1641. godine kada je Japan maloj skupini nizozemskih trgovaca dopustio pristanak i boravak na umjetnom otoku Deshima jednom godišnje (Fameli, 2020). Minijaturna Deshima napravljena u luci Nagasaki, bila je okružena zidom, a s kopnom ju je povezivao most kojega je nadzirala straža (Slika 6.). Japan je imao još jedan kontakt sa svijetom: osim nizozemskoga, i jedan je kineski brod mogao jednom godišnje pristati u japansku luku. Kada su klanski ratovi prestali, Japan je napokon bio ujedinjen i nastupilo je razdoblje mira. Samuraji su počeli gubiti na važnosti i imali su sve manji utjecaj (Katsuhito, 2017).



Slika 6. Otok Deshima

Odjeljenje Japana od ostatka svijeta samonametnutom izolacijom rezultiralo je snažnim razvojem autohtone znanosti, ali i umjetnosti. Ovo razdoblje nazvano je *Genroku*, a često se naziva i *Genroku renesansom*. Ovo razdoblje obilježili su samuraji koji su u nedostatku posla, zbog stanja mira, otvarali svoje privatne škole (*juku*). Glavni predmeti u školama samuraja bili su čitanje, pisanje i matematika, a podučavale su se i borilačke vještine, filozofija, čajne ceremonije i aranžiranje cvijeća. Njegovale su se također i vještine u medicini, poeziji i glazbi. Na samom kraju Edo razdoblja, u Japanu je u tek dvjesto pedeset godina provedeno masovno opismenjavanje do tada gotovo nepismene populacije i tako japansko stanovništvo doživljava procvat. Budući da su samurajske škole, tzv. *juku*, bile jedini oblik škola toga vremena u Japanu, vrlo vjerojatno i sangaku tradicija vuče korijene iz upravo takvih škola. Ne zna se tko su sve autori sangaku problema, ali poznato je da su ih, osim učitelja i učenika samurajskih škola, izrađivali i žene i djeca. Igrom s trokutima i kružnicama na jednostavan način, stvorili su se složeni problemi koji plijene pozornost estetskim oblikovanjem raznim bojama na pločama, ali kada se analiziraju brzo se uočava da i nisu baš svi tako jednostavni kako na prvu izgledaju (Rothman & Fukagawa, 1998).

2.6. Haiku poezija

Hrvatski matematičar Devidé koji se bavio između ostalog i sangaku problemima, ali i pisanjem haiku poezije u svojoj knjizi *Čudesna matematika – pogled iznutra i izvana*, objašnjava poveznicu matematike i haiku poezije:

> *„Estetski kriteriji igraju važnu ulogu pri formuliranju čitavih matematičkih struktura i teorija, posebno pri odabiru aksioma koji ih definiraju, pri čemu važnu i odlučujuću ulogu igraju ne samo zahtjevi za istinitošću, nego i za ljepotom. Pa ako smo već prihvatili činjenicu da su i poezija (a time i njezin haiku oblik) i matematika (i) umjetnost, neće biti neočekivano ili začuđujuće da među haiku poezijom i matematikom ima nekih veza.“* (Devidé, 2010, str 52).

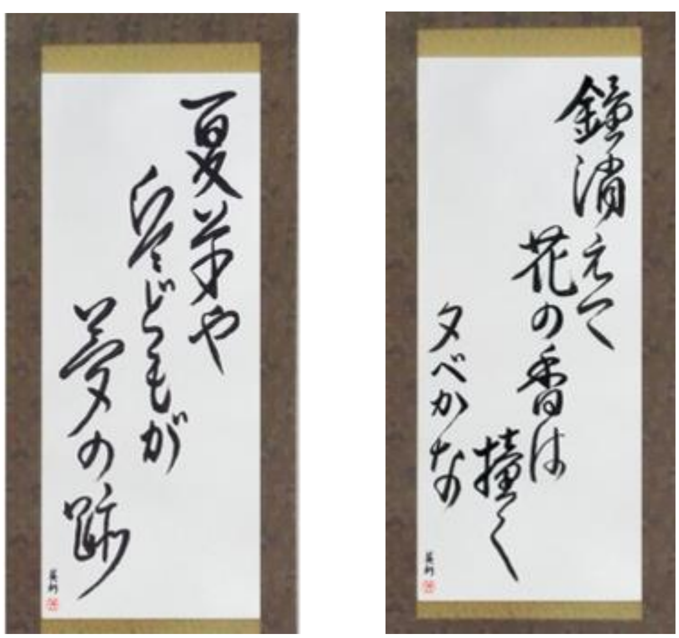
Haiku poezija još je jedan od brojnih oblika umjetnosti Japana nastala u razdoblju japanske povijesti Genroku renesanse. Pripada japanskoj pjesničkoj nerimovanoj formi. Karakteristično je da se sastoji od samo jedne strofe od 17 slogova. Strofa ima tri stiha, a forma u kojoj su pisani je strogo određena: prvi stih čini pet slogova, drugi stih sedam, a treći, ujedno i zadnji stih, sastoji se opet od pet slogova. Kao zaseban oblik poezije u japanskoj književnosti postaje tek u 17. stoljeću, ali ostaje nepoznat javnosti pod nazivom haiku sve do 19. stoljeća.

Izraz haiku izvedenica je nastala od riječi *haikai*, što označava šaljivi oblik pjesme povezane stihovima (*renge*), i riječi *hokku* koja označava početak strofe *renge* (Britannica: *Haiku*).

Ovaj oblik književnosti postao je prepoznatljiv vrlo rano u razdoblju Tokugawa šogunata kada ga je Bashō, veliki majstor haiku poezije, uzdigao na razinu visoko profinjene umjetnosti i tako popularizirao ovaj oblik poezije u 17. stoljeću. Danas se Bashō stoga smatra najutjecajnijim pjesnikom i piscem haiku poezije 17. stoljeća. Njegova su putovanja Japanom postala tema njegovih stihova, a njegovi su haikui bili dostupni širokom dijelu japanskog društva. Široka privlačnost, ali i dostupnost pjesama pomogla je da ovaj oblik umjetnosti postane najpopularniji oblik u japanskoj poeziji. Osim Bashōa, još neki o utjecajnijih pjesnika haiku poezije bili su Buson, Shiki, Kyoshi i Kawahigashi Hekigotō (Britannica: *Matsuo Bashō*)

Danas se izraz haiku koristi za opisivanje svih pjesama koje koriste strukturu od tri stiha od 17 slogova te motiv za pisanje više nije samo priroda već se raspon tema proširio. Također, svaka pjesma napisana u obliku haikua ili njegova modifikacija na jeziku koji nije japanski, također se naziva haiku. Nakon Drugog svjetskog rata se popularnost ovog oblika književnosti značajno proširila izvan granica Japana, dok se danas haiku piše i na velikom broju jezika svijeta. Svakako je haiku ostao umjetnost izražavanja što više misli u što manje riječi (Britannica: *Haiku*).

U nastavku su dana dva primjera haiku poezije na japanskom jeziku (Slika 7.), koje potpisuje Bashō (Fine Japanese Calligraphy, *Matsuo Bashō Haiku*), s prijevodom na hrvatski jezik.



Slika 7. Haiku poezija – Bashō

Prva haiku pjesma

natsukusa ya tsuwamono domo ga yume no ato	夏草や 兵どもが 夢の跡	*Ljetna trava* *ratnici su* *tragovi snova.*
Bashō	芭蕉	

Druga haiku pjesma

kane kiete hana no ka wa tsuku yuube kana	鐘消えて 花の香は撞く 夕べ哉	*I dok zvono hrama blijedi* *zvuk se zadržava u mirisu cvijeća* *večer.*
Bashō	芭蕉	

3. Sadržaj i struktura sangaku ploča

Promatrajući sangaku ploče uočljivo je na prvi pogled da su autori sangaku ploča posebnu pažnju posvećivali estetskom dojmu, kojeg su ostvarivali služeći se raznim bojama i kompozicijama prikazanih likova (Kabić, 2012). Na sangaku pločama najčešće su postavljeni različiti problemi koje treba riješiti pa se zato nazivaju *sangaku problemi*. Među sangaku problemima postoje jednostavni i lako rješivi, ali i oni koje je moguće riješiti tek uz primjenu razrađenih matematičkih metoda, uz dozu mašte, kreativnosti i upornosti (Devidé, 2010).

Sangaku problemi najčešće objedinjuju različite geometrijske koncepte u jednu vizualno privlačnu cjelinu te se zahtjeva otkrivanje ili potvrđivanje odgovarajućeg odnosa među njima, zbog čega se i nazivaju *geometrijski sangaku problemi*. Unutar njih se određuju razne vrste odnosa između stranica različitih *n*-terokuta i radijusa kružnica, između njihovih površina, razmatraju se različiti problemi optimizacije itd. Stoga, svaki čitatelj koji se želi uhvatiti u koštac s rješavanjem odabranog geometrijskog sangaku problema, treba imati barem elementarna geometrijska znanja, ali i razumijevanje utkanih geometrijskih koncepata kako bi ih mogao funkcionalno povezati u svrhu otkrivanja puta do rješenja postavljenog problema.

Sadržaj sangaku ploča obično slijedi zadanu formu, postavljanje problema kroz umjetnički prikaz i popratni tekst te izraz koji treba utvrditi (*Jojutstu* formula). Međutim, na većini sangaku ploča nije dan potpuni dokaz ili obrazloženje postavljenog izraza najčešće zbog nedovoljno prostora na ploči. No, s druge strane, smatralo se da su sangaku ploče postavljene na takav način i kao izazov čitatelju, dok je konačan izraz dan kao ideja vodilja na putu rješavanja problema. (Fameli, 2020).

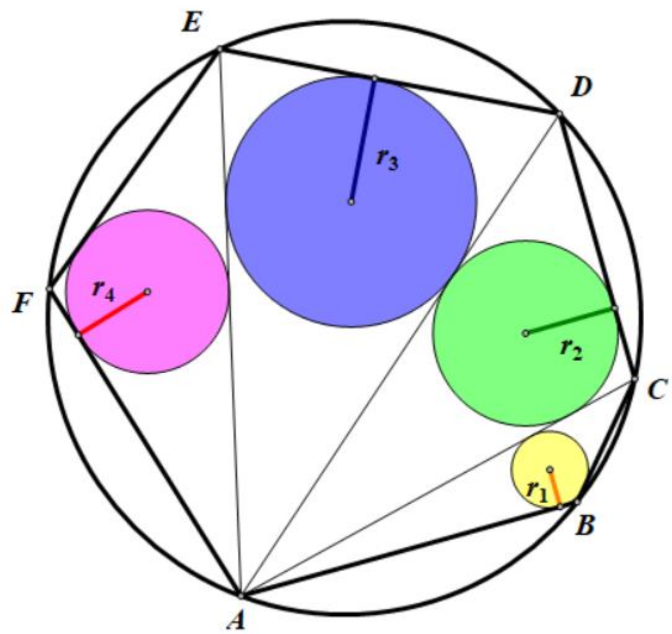
Kada se govori o sadržaju sangaku ploča nezaobilazno je spomenuti tri japanska teorema, koja su postavili Y. Mikamija i T. Kobayashi. Vizualnim prikazom plijene pozornost čitatelja već na prvi pogled, ali za otkrivanje postavljenog izraza potrebno je ipak malo više suptilnog geometrijskog znanja i vještina rješavanja geometrijskih problema.

3.1. Prvi japanski teorem

Prvi japanski teorem razmatra konveksni *n*-terokut koji je upisan u krug. Povlačenjem dijagonala iz jednog vrha, *n*-terokut se dijeli na $n-2$ trokuta, a zatim je u svaki od tih trokuta upisana kružnica. Teoremom se tvrdi da je zbroj radijusa svih upisanih kružnica konstantan te da ne ovisi o podjeli *n*-terokuta na trokute (Slika 8.).

Dakle, treba dokazati:

Ako su $r_1, r_2 \dots r_{n-2}$ radijusi kružnica upisanih u trokute, onda vrijedi: $r_1 + r_2 + \dots + r_{n-2} = c$.



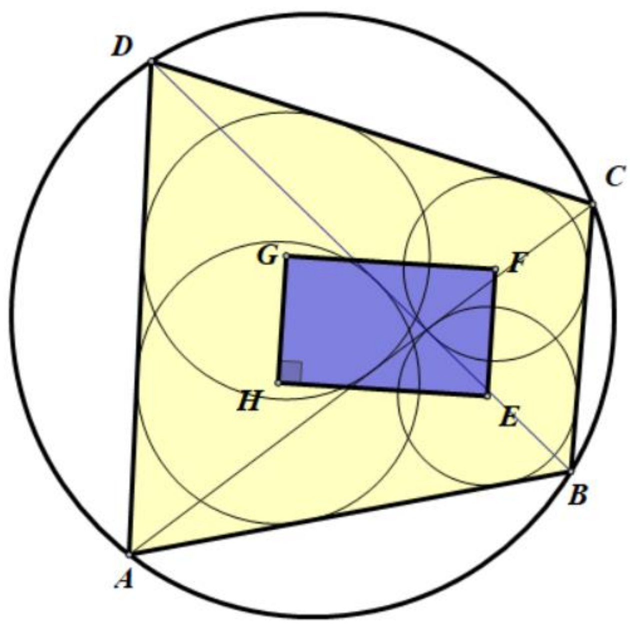
Slika 8. Vizualni prikaz prvog japanskog teorema

3.2. Drugi japanski teorem

U drugom japanskom teoremu razmatra se konveksni četverokut $ABCD$ koji je upisan u krug (tetivni četverokut). Povlačenjem svake dijagonale četverokut se dijeli na dva trokuta i u svaki od tih trokuta upisana je kružnica. Središta tih kružnica čine četverokut $EFGH$ koji je pravokutnik (Slika 9.).

Dakle, treba dokazati:

Ako su E, F, G i H središta kružnica upisanih redom u trokute ΔABC, ΔBCD, ΔCDA i ΔDAB, onda je četverokut $EFGH$ pravokutnik.



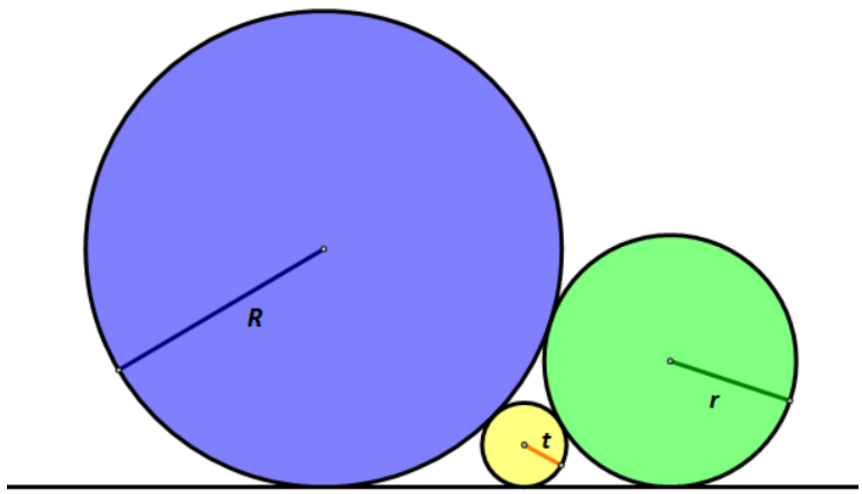
Slika 9. Vizualni prikaz drugog japanskog teorema

3.3. Treći japanski teorem

Treći japanski teorem razmatra tri kružnice različitih radijusa koje se dodiruju izvana svaka sa svakom i sve tri kružnice dodiruju isti pravac. U ovom problemu treba uspostaviti odnos između radijusa kružnica, odnosno radijus najmanje kružnice treba prikazati preko radijusa preostalih dviju kružnica (Slika 10.).

Dakle, treba dokazati:

Ako su radijusi kružnica *t*, *r* i *R*, pri čemu je $t < r < R$, onda vrijedi: $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$.



Slika 10. Vizualni prikaz trećeg japanskog teorema

Inspirirani ljepotom predstavljenih geometrijskih sangaku problema u nastavku slijedi detaljan opis sedam odabranih problema koji objedinjuju različite elementarne geometrijske koncepte euklidske geometrije. Među odabranim problema nalazi se i treći japanski teorem.

Pri odabiru sangaku problema glavna ideja vodilja bila je mogućnost rješavanja postavljenih problema znanjima koja se stječu tijekom osnovnoškolskog matematičkog obrazovanja.

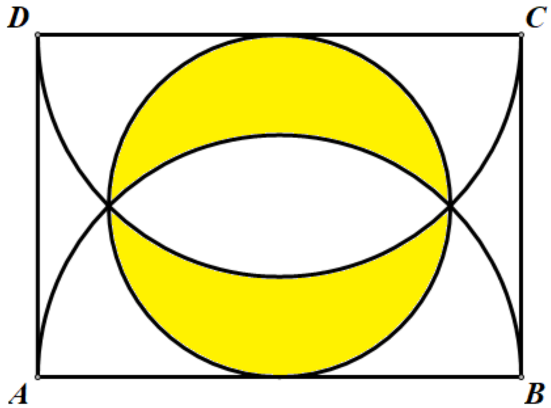
4. Odabrani geometrijski sangaku problemi

Struktura obrade odabranih geometrijskih sangaku problema u ovom radu slična je strukturi na sangaku pločama. Prvo se predstavlja problem kroz odgovarajući umjetnički izričaj, uz koji se ističe mjesto (prefektura) i godina izlaganja originalne ploče. Uz predstavljeni problem daje se i tekstualni opis problema te se ističe koji odnos je potrebno otkriti ili obrazložiti. Zatim slijedi detaljan prikaz rješenja koji uključuju samo elementarna geometrijska znanja. Vođeni prethodno opisanim karakteristikama sangaku problema, cilj ovog rada bio je ponuditi detaljan prikaz rješenja odabranih geometrijskih sangaku problema na način na koji bi se moglo raditi s učenicima na satu matematike.

Osim rješenja problema, uz svaki problem daje se i prikaz konstrukcije sangaku figure koja se razmatra unutar problema te detaljan opis procesa konstruiranja po koracima. Sve korištene figure izrađene su u programu dinamičke geometrije i sam opis procesa konstruiranja slijedi stvarni proces konstruiranja. Uz konstrukciju se ne daje posebno diskusija zato što opravdanost konstrukcije u većini slučajeva proizlazi iz samog rješenja problema.

Problemi su poredani prema zahtjevnosti i vrstama koncepata koji su u njima zastupljeni, a koji slijede geometrijski kurikulum elementarnog matematičkog obrazovanja.

4.1. Problem 1. Lunule unutar pravokutnika



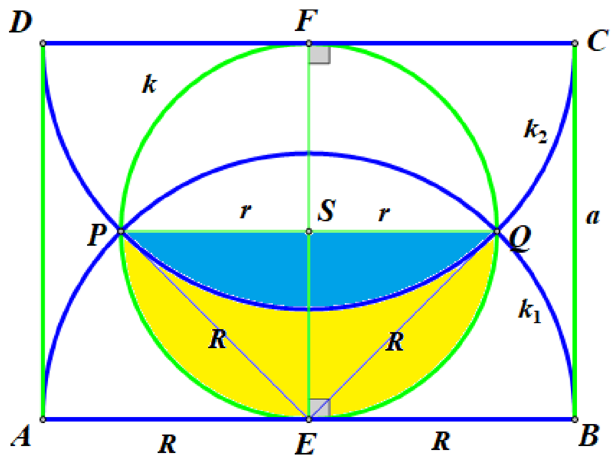
Slika 11. Problem 1 - Fukushima prefektura, 1883.

Opis problema: Četverokut $ABCD$ je pravokutnik kojem je $|AB| = |BC|\sqrt{2}$. Krug koji dira dulje stranice pravokutnika prolazi sjecištima polukružnica nad tim stranicama i tako oblikuje dvije *lunule*. Površinu *lunule* izrazite preko duljine dulje stranice pravokutnika (Slika 11.).

Rješenje: Neka je zadan pravokutnik $ABCD$ kojemu je kraća stranica duljine $|BC| = a$ i dulja stranica duljine $|AB| = a\sqrt{2}$ (Slika 12.).

Neka je R radijus polukružnica k_1 i k_2 nad duljim stranicama pravokutnika, a P i Q sjecišta tih polukružnica. Nadalje, neka je r radijus kružnice k koja iznutra dira stranice pravokutnika, a E i F dirališta te kružnice i stranica pravokutnika. S obzirom da kružnica k prolazi sjecištima polukružnica P i Q, zbog simetrije, točke E i F polovišta su stranica pravokutnika $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom.

Kako je stranica $\overline{AB}$ duljine $|AB| = a\sqrt{2}$ i ta stranica promjer je polukružnice duljine $2R$ vrijedi: $2R = a\sqrt{2}$, odnosno polumjer polukružnice duljine je $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. S obzirom na to da su A, B, P i Q točke iste polukružnice sa središtem E vrijedi: $|AE| = |PE| = |QE| = |BE| = R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Slika 12. Slika Problema 1 s oznakama

Prema uvjetu dodira kružnice k i stranica pravokutnika (koje pripadaju tangentama te kružnice) vrijedi: $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ i $\overline{EF} \perp \overline{CD}$. Kako su dužine $\overline{EF}$ i $\overline{BC}$ okomite na iste stranice pravokutnika, one su međusobno paralelne, tj. vrijedi: $EF \parallel BC$, a kako je udaljenost između paralelnih stranica pravokutnika jednaka, vrijedi: $|EF| = |BC| = a$. S druge strane, promjer kružnice k je dužina $\overline{EF}$ duljine $2r$ pa vrijedi: $2r = a$, odnosno polumjer kružnice k duljine je: $r = \frac{a}{2}$.

Nadalje, kružnica k prolazi i sjecištima polukružnica P i Q, a dužina $\overline{PQ}$ sadrži središte kružnice S pa je $\overline{PQ}$ promjer kružnice i vrijedi: $|PQ| = 2r = a$. Kako je ΔPEQ trokut nad promjerom kružnice k on je pravokutan, a kako je njegov vrh središte polukružnice on je i jednakokračan s katetama duljine R.

Kako bi se odredilo koliku površinu zauzima *lunula*, oznaka P_{Lunule}, potrebno je odrediti koliku površinu zauzima polukrug nad promjerom $\overline{PQ}$, oznaka $P_{\substack{polukruga \\ radijusa\ r}}$, kao i kružni odsječak nad tetivom $\overline{PQ}$, oznaka $P_{\substack{kružnog \\ odsječka}}$. Za određivanje mjere površine kružnog odsječka potrebno je odrediti koliku površinu zauzima pripadni kružni isječak koji je dio polukruga radijusa R i središnjeg kuta od 90°, oznaka $P_{\substack{kružnog \\ isječka \\ radijusa\ R}}$, kao i koliku površinu zauzima pripadni trokut $P_{\Delta PEQ}$.

Površina koju zauzima polukrug nad promjerom $\overline{PQ}$:

$$P_{\substack{polukruga\\ radijusa\ r}} = \frac{1}{2} P_{\substack{kruga\\ radijusa\ r}} = \frac{1}{2} r^2 \pi = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} \pi = \frac{a^2}{8} \pi.$$

Površina koju zauzima kružni isječak koji je dio polukruga radijusa R i središnjeg kuta od 90°:

$$P_{\substack{kružnog\\ isječka\\ radijusa\ R}} = \frac{1}{4} P_{\substack{kruga\\ radijusa\ R}} = \frac{1}{4} R^2 \pi = \frac{1}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4} \pi = \frac{a^2}{8} \pi.$$

Površina koju zauzima jednakokračni pravokutni trokut s katetama $\overline{PE}$ i $\overline{EQ}$ duljine R:

$$P_{\Delta PEQ} = \frac{|PE| \cdot |EQ|}{2} = \frac{R \cdot R}{2} = \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4} = \frac{a^2}{4}.$$

Konačno, površina koju zauzima jedna *lunula* jest:

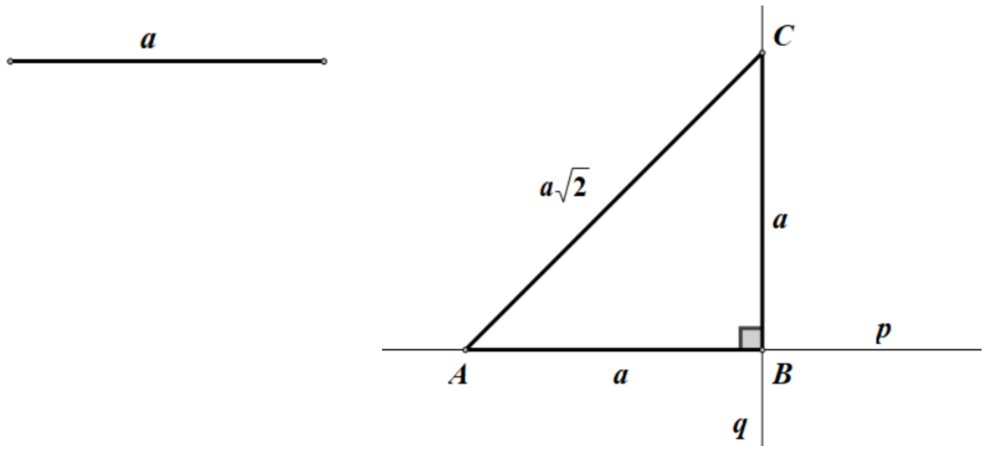
$$\begin{aligned} P_{Lunele} &= P_{\substack{polukruga\\ radijusa\ r}} - P_{\substack{kružnog\\ odsječka}} \\ &= P_{\substack{polukruga\\ radijusa\ r}} - \left(P_{\substack{kružnog\\ isječka\\ radijusa\ r}} - P_{\Delta PEQ} \right) \\ &= P_{\substack{polukruga\\ radijusa\ r}} - P_{\substack{kružnog\\ isječka\\ radijusa\ r}} + P_{\Delta PEQ} \\ &= \frac{a^2}{8}\pi - \frac{a^2}{8}\pi + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Kako je $|AB| = a\sqrt{2}$, odnosno $|AB|^2 = 2a^2$, vrijedi: $P_{Lunule} = \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{8} = \frac{|AB|^2}{8}$. To znači da je površina kvadrata, kojemu stranica odgovara duljoj stranici pravokutnika, osam puta veća od površine koju zauzima jedna *lunula*, odnosno četiri puta veća od površine koju zauzimaju dvije *lunule*.

$$|AB|^2 = 8 \cdot P_{Lunule}$$
$$|AB|^2 = 4 \cdot (2P_{Lunule})$$

Konstrukcija: Prije konstrukcije sangaku figure potrebno je konstruirati dužinu duljine $a\sqrt{2}$. Neka je zadana dužina duljine *a*. Dužina duljine $a\sqrt{2}$ može se konstruirati kao dijagonala kvadrata stranice duljine *a* ili kao hipotenuza pravokutnog trokuta kojem su katete duljina *a* (Slika 13.).

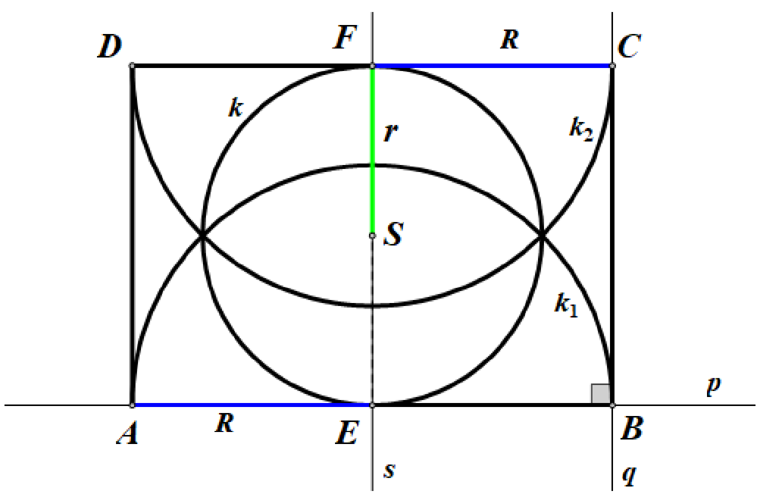
Prvi dio: konstrukcija dužine duljine $a\sqrt{2}$.



Slika 13. Konstrukcija dužine duljine $a\sqrt{2}$

- na proizvoljni pravac *p* prenese se dužina duljine *a* od proizvoljne točke *A*, $|AB| = a$
- kroz točku *B* konstruira se okomica *q* na pravac *p*
- na okomicu *q* prenese se dužina duljine *a* od točke *B*, $|BC| = a$
- dužina $\overline{AC}$ je hipotenuza trokuta ΔABC duljine $a\sqrt{2}$, $|AC| = a\sqrt{2}$.

Drugi dio: konstrukcija cijele sangaku figure (Slika 14.).



Slika 14. Konstrukcija sangaku figure 1

Konstrukcija pravokutnika *ABCD*:

- na proizvoljni pravac p prenese se dužina duljine $a\sqrt{2}$ od proizvoljne točke A, $|AB| = a\sqrt{2}$
- kroz B se konstruira okomica q na pravac p
- na okomicu q prenese se dužina duljine a od točke B, $|BC| = a$
- iz točke A opiše se kružnica radijusa a, $k(A,a)$
- iz točke C opiše se kružnica radijusa $a\sqrt{2}$, $k\left(C,a\sqrt{2}\right)$
- opisane kružnice sijeku se u točki D, $k(A,a) \cap k\left(C,a\sqrt{2}\right) = \{D\}$

  četverokut *ABCD* konstruiran na ovaj način jest pravokutnik.

Konstrukcija polukružnica k_1 i k_2:

- konstruira se simetrala s stranice $\overline{AB}$ (koja je ujedno i simetrala stranice $\overline{CD}$)

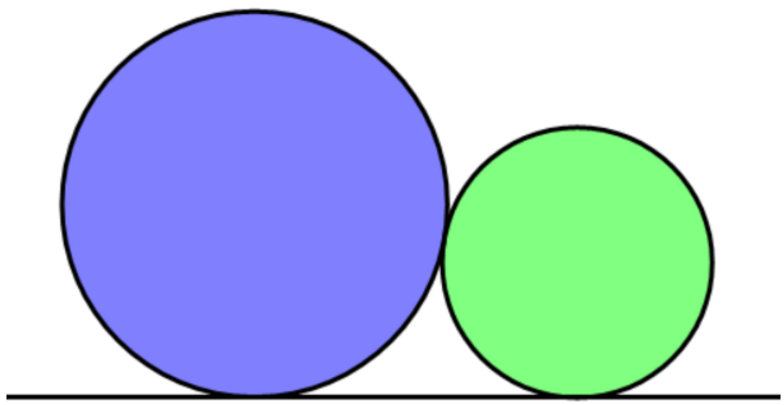
  simetrala polovi stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom u točkama E i F
- konstruiraju se polukružnice k_1 i k_2 iz točaka E i F radijusa $R = |AE| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom kao promjerima, $k_1(E,R)$ i $k_2(F,R)$.

Konstrukcija kružnice k:

- konstruira se polovište S dužine $\overline{EF}$, a zatim kružnica k sa središtem S radijusa $r = \frac{|EF|}{2}$, $k(S,r)$.

Opisanim postupkom konstruirana je cijela sangaku figura.

4.2. Problem 2. Dvije kružnice različitih radijusa sa zajedničkom tangentom



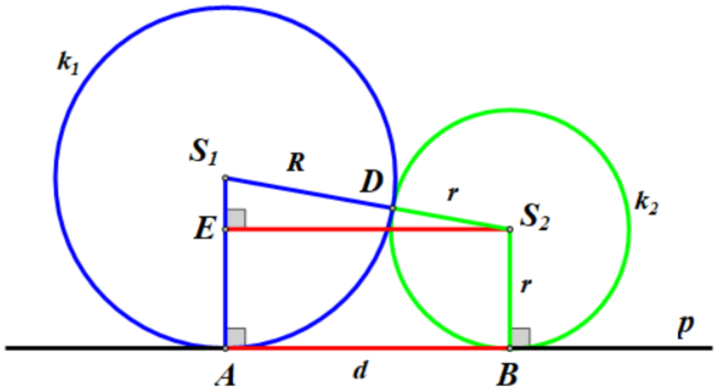
Slika 15. Problem 2 - Miyagi prefektura, 1892.

Opis problema: Dvije kružnice različitih radijusa dodiruju se izvana i obje kružnice dodiruju isti pravac. Odrediti udaljenost između točaka dirališta tih kružnica i pravca (Slika 15.).

Rješenje: Neka su kružnica k_1 sa središtem S_1 i radijusom R te kružnica k_2 sa središtem S_2 i radijusom r, pri čemu je $R > r$, kružnice koje se dodiruju izvana u točki D. Nadalje, neka je A točka dirališta kružnice k_1 i pravca p, a B točka dirališta kružnice k_2 i pravca p. Neka je $d = |AB|$ udaljenost između dirališta A i B na pravcu p koju treba odrediti (Slika 16.).

S obzirom na to da kružnice k_1 i k_2 dodiruju isti pravac p, taj pravac je zajednička vanjska tangenta tih dviju kružnica. Prema uvjetu dodira kružnice i tangente, polumjeri povučeni iz dirališta okomiti su na tangentu, zato vrijedi: $\overline{AS_1} \perp p$, $\overline{BS_2} \perp p$. Kako su istaknuti polumjeri okomiti na isti pravac p, oni su međusobno paralelni, tj. $\overline{AS_1} \parallel \overline{BS_2}$.

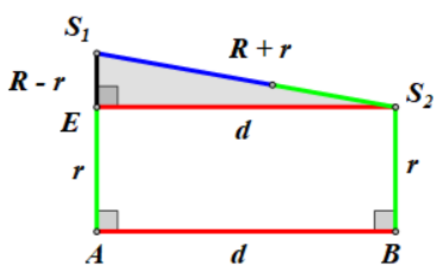
Prema uvjetu dodira dviju kružnica izvana, središta kružnica S_1 i S_2 te diralište D kolinearne su točke (pripadaju istom pravcu) pa vrijedi: $|S_1S_2| = |S_1D| + |DS_2| = R + r$.



Slika 16. Slika Problema 2 s oznakama

Neka je S_2E okomica povučena iz središta S_2 na polumjer $\overline{AS_1}$. S obzirom na to da su pravac p i okomica S_2E okomiti na isti polumjer, oni su međusobno paralelni, tj. $S_2E \parallel p$. Stoga je četverokut ABS_2E pravokutnik jer su mu nasuprotne stranice paralelne, a kutovi pravi. U pravokutniku su nasuprotne stranice jednakih duljina pa vrijedi: $|ES_2| = |AB| = d$ i $|AE| = |BS_2| = r$

Promotrimo ΔS_1ES_2 (Slika 17.). Trokut je pravokutan s pravim kutom pri vrhu E. Hipotenuza trokuta duljine je $|S_1S_2| = R + r$, jedna kateta duljine je $|S_1E| = |S_1A| - |AE| = R - r$, a druga kateta duljine je $|ES_2| = d$ i to je duljina koju treba odrediti.



Slika 17. Izdvojeni trokut ΔS_1ES_2

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ΔS_1ES_2 dobiva se duljina druge katete:

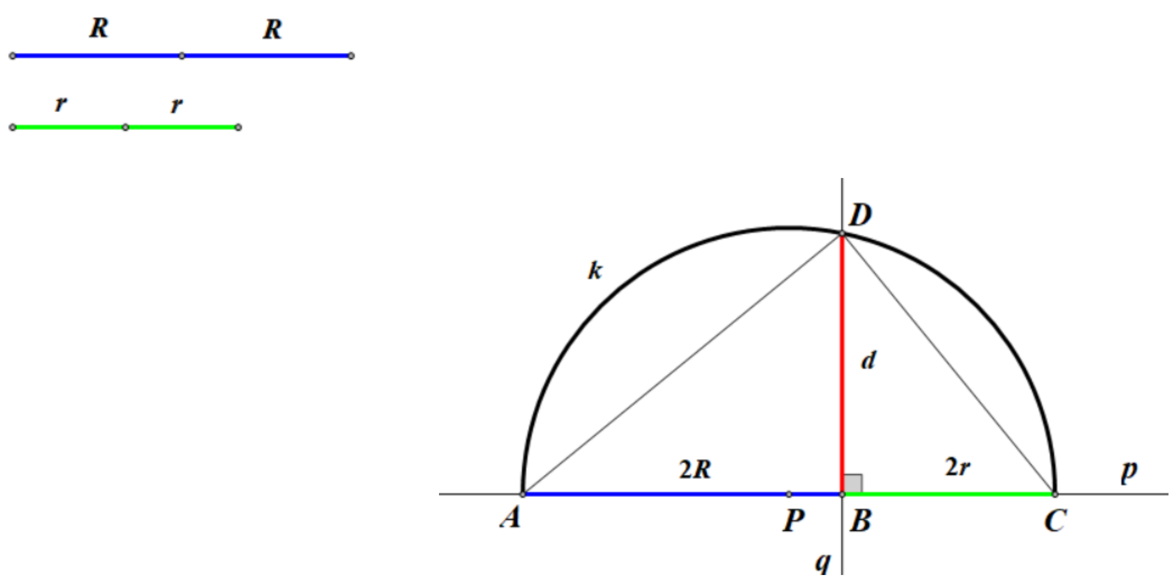
$$
\begin{aligned}
|ES_2|^2 &= |S_1S_2|^2 - |S_1E|^2 \\
&= (R+r)^2 - (R-r)^2 \\
&= R^2 + 2Rr + r^2 - \left(R^2 - 2Rr + r^2\right) \\
&= 4Rr
\end{aligned}
$$

Konačno, vrijedi: $|AB| = |ES_2| = 2\sqrt{Rr}$, odnosno $|AB| = \sqrt{(2R)(2r)}$, što znači da je udaljenost između dirališta kružnica s pravcem jednaka geometrijskoj sredini promjera tih kružnica.

Konstrukcija: Prije konstrukcije sangaku figure potrebno je konstruirati dužinu koja odgovara dužini između dirališta dviju kružnica i pravca.

Neka su zadani polumjeri (promjeri) dviju kružnica duljine R i r. Dužina duljine $d = 2\sqrt{Rr} = \sqrt{(2R)\cdot(2r)}$ može se konstruirati kao visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta nad promjerom kružnice duljine $2R + 2r$.

Prvi dio: konstrukcija dužine duljine $d = 2\sqrt{Rr}$ (Slika 18.).



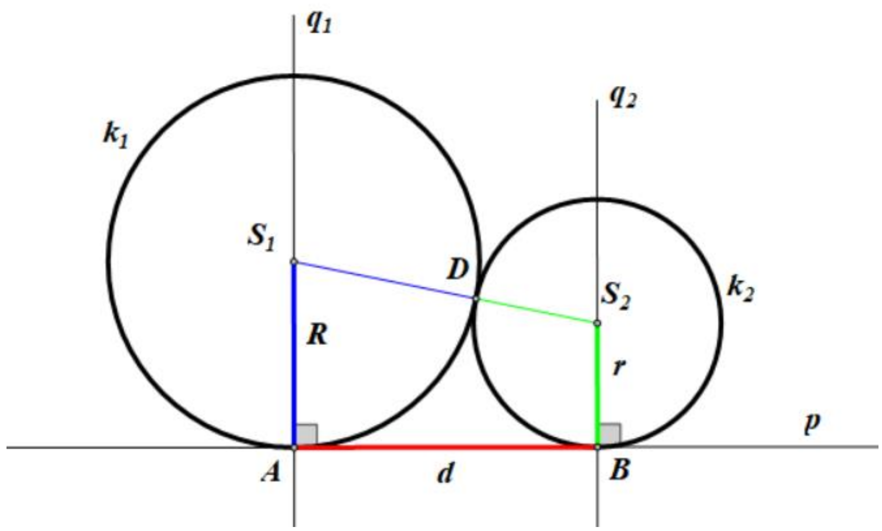
Slika 18. Konstrukcija dužine duljine $d = 2\sqrt{Rr}$

- na proizvoljni pravac p prenese se dužina duljine $2R$ počevši od proizvoljne točke A, $|AB| = 2R$
- zatim se na pravac p prenese dužina duljine $2r$ počevši od točke B, $|BC| = 2r$
- konstruira se polovište P dužine $\overline{AC}$, koja je duljine $|AC| = |AB| + |BC| = 2R + 2r$
- konstruira se (polu)kružnica k nad promjerom $\overline{AC}$, sa središtem P radijusa $|PA| = \frac{2R+2r}{2} = R + r$; $k(P, |PA|)$
- kroz točku B konstruira se okomica q na pravac p
- neka je D točka presjeka kružnice k i okomice q; $k \cap q = \{D\}$
- trokut ΔACD je pravokutan s pravim kutom pri vrhu D (obodni kut nad promjerom kružnice), a dužina $\overline{BD}$ je njegova visina na hipotenuzu
- prema Euklidovom poučku o duljini visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta vrijedi:

$$|BD| = \sqrt{|AB| \cdot |AC|} = \sqrt{(2R) \cdot (2r)} = 2\sqrt{Rr}.$$

Vrijedi: $d = |BD| = 2\sqrt{Rr}$.

Drugi dio: konstrukcija cijele sangaku figure (Slika 19.).

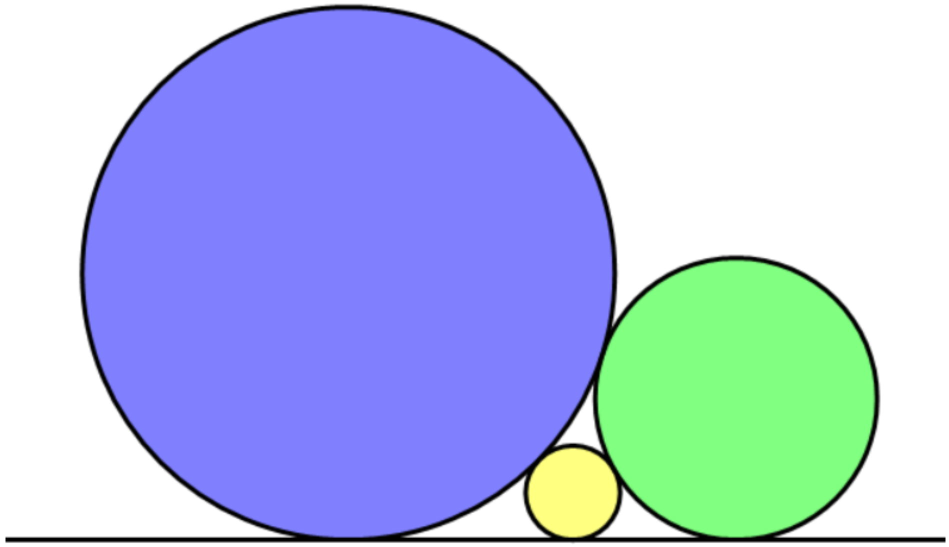


Slika 19. Konstrukcija sangaku figure 2

- na proizvoljni pravac p prenese se dužina duljine d počevši od proizvoljne točke A, $|AB| = d = 2\sqrt{Rr}$
- kroz točke A i B konstruiraju se redom okomice q_1 i q_2 na pravac p
- na okomicu q_1 prenese se dužina duljine R počevši od točke A, $|AS_1| = R$
- na okomicu q_2 prenese se dužina duljine r počevši od točke B, $|BS_2| = r$
- konstruiraju se kružnice: k_1 sa središtem S_1 radijusa R i kružnica k_2 sa središtem S_2 radijusa r; $k_1(S_1, R)$ i $k_2(S_2, r)$
- presjek kružnica k_1 i k_2 je točka D, tj. točka dirališta tih dviju kružnice, $k_1 \cap k_2 = \{D\}$.

Opisanim postupkom konstruirana je cijela sangaku figura.

4.3. Problem 3. Tri kružnice različitih radijusa sa zajedničkom tangentom



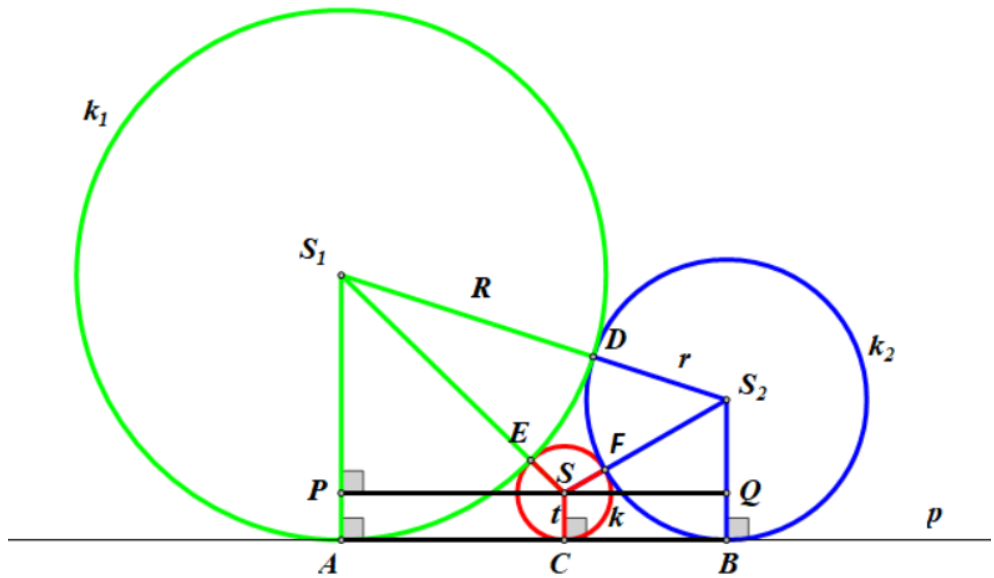
Slika 20. Problem 3 - Gunma Prefektura, 1824.

Opis problema. Tri kružnice različitih radijusa dodiruju se izvana svaka sa svakom i sve tri kružnice dodiruju isti pravac. Ako za radijuse kružnica vrijedi $t < r < R$ pokazati da onda vrijedi: $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$ (Slika 20.).

Ovaj sangaku problem poznat je i kao jedan od tri važna japanska teorema. Iako je nastao u različito vrijeme u odnosu na prethodno opisani problem, ovdje se razmatra kao prirodan nastavak prethodnog sangaku problema. Iz tog razloga koriste se i jednake oznake za podudarne elemente.

Rješenje: Neka su kružnica k_1 sa središtem S_1 i radijusom R, kružnica k_2 sa središtem S_2 i radijusom r te kružnica k sa središtem S radijusa t tri kružnice koje se dodiruju izvana svaka sa svakom, pri čemu je $R > r > t$. Neka je diralište kružnica k_1 i k_2 točka D, diralište kružnica k_1 i k točka E te diralište kružnica k_2 i k točka F (Slika 21.).

Nadalje, neka su *A*, *B* i *C* točke dirališta kružnica k_1, k_2 i *k* redom s pravcem *p*. S obzirom na to da sve tri kružnice dodiruju isti pravac *p*, taj pravac je njihova zajednička vanjska tangenta. Prema uvjetu dodira kružnice i tangente, polumjeri povučeni iz dirališta okomiti su na tangentu, zato vrijedi: $\overline{AS_1} \perp p$, $\overline{BS_2} \perp p$ i $\overline{CS} \perp p$. Kako su istaknuti polumjeri okomiti na isti pravac *p*, oni su međusobno paralelni, tj. $\overline{AS_1} \parallel \overline{BS_2} \parallel \overline{CS}$.

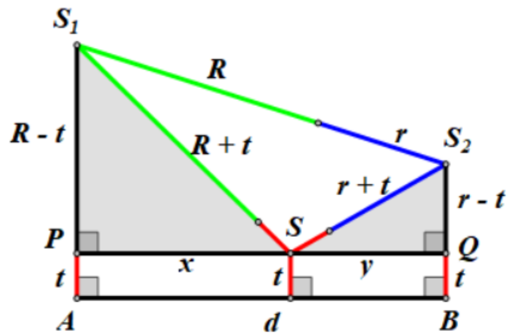


Slika 21. Slika Problema 3 s oznakama

Prema uvjetu dodira dviju kružnica izvana, središta kružnica S_1 i S_2 te dirałište *D* kolinearne su točke (pripadaju istom pravcu) pa vrijedi: $|S_1S_2| = |S_1D| + |DS_2| = R + r$. Analogno, središta kružnica S_1 i S te diralište *E* kolinearne su točke pa vrijedi: $|S_1S| = |S_1E| + |ES| = R + t$. Također, središta kružnica S_2 i S te diralište *F* kolinearne su točke pa vrijedi: $|S_2S| = |S_2F| + |FS| = r + t$.

Neka je PQ pravac kroz točku *S* paralelan s pravcem *p*, $PQ \parallel p$. S obzirom na to da su na pravac *p* okomiti polumjeri kružnica $\overline{AS_1}$, $\overline{BS_2}$ i $\overline{CS}$, ti polumjeri okomiti su i na pravac PQ, a polumjeri su međusobno paralelni. Stoga je četverokut $ABQP$ pravokutnik jer su mu nasuprotne stranice paralelne, a kutovi pravi. U pravokutniku su nasuprotne stranice jednakih duljina pa vrijedi: $|PQ| = |AB| = d$ i $|AP| = |CS| = |BQ| = t$.

Promotrimo dva nastala trokuta: ΔS_1PS i ΔS_2SQ (Slika 22.). Trokuti su pravokutni s pravim kutem pri vrhovima P i Q redom. U trokutu ΔS_1PS hipotenuza je duljine $|S_1S| = R + t$, jedna kateta je duljine $|S_1P| = |S_1A| - |AP| = R - t$, a druga kateta je nepoznate duljine $|PS| = x$. U trokutu ΔS_2SQ hipotenuza je duljine $|S_2S| = r + t$, jedna kateta je nepoznate duljine $|SQ| = y$, a druga kateta je duljine $|S_2Q| = |S_2B| - |BQ| = r - t$.



Slika 22. Izdvojeni pravokutni trokuti ΔS_1PS i ΔS_2SQ

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutne trokute ΔS_1PS i ΔS_2SQ mogu se odrediti duljine kateta x i y (ili primjenom rezultata iz prethodnog problema):

$$
\begin{aligned}
x^2 &= |PS|^2 = |S_1S|^2 - |S_1P|^2 \\
&= (R+t)^2 - (R-t)^2 \\
&= R^2 + 2Rt + t^2 - \left(R^2 - 2Rt + t^2\right) \\
&= 4Rt \\
x &= 2\sqrt{Rt}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
y^2 &= |SQ|^2 = |SS_2|^2 - |S_2Q|^2 \\
&= (r+t)^2 - (r-t)^2 \\
&= r^2 + 2rt + t^2 - \left(r^2 - 2rt + t^2\right) \\
&= 4rt \\
y &= 2\sqrt{rt}
\end{aligned}
$$

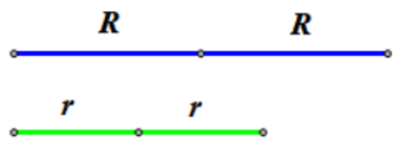
Kako je s jedne strane $|PQ| = |AB| = d$, a s druge strane vrijedi: $|PQ| = |PS| + |SQ| = x + y$, izjednačavanjem se dobiva $d = x + y$. U prethodnom sangaku problemu (Problem 2) izveden je izraz za udaljenost između dirališta zajedničkih tangenti kružnica k_1 i k_2: $d = |AB| = 2\sqrt{Rr}$. Uvrštavanjem svih izvedenih izraza u jednakost $d = x + y$ dobiva se:

$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rt} + 2\sqrt{rt} \,\Big|\, : 2\sqrt{Rrt}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Konstrukcija: Kako je već rečeno na samom početku opisa problema, ovaj problem se prirodno nadovezuje na prethodno opisani sangaku problem 2 što vrijedi i za njegovu konstrukciju.

Neka su zadani polumjeri (promjeri) dviju kružnica duljine *R* i *r*.



Slika 23. Polumjeri (promjeri) duljina *R* i *r*

Prvi dio: konstrukcija dužine duljine $d = 2\sqrt{Rr}$.

Dužina duljine $d = |AB| = 2\sqrt{Rr} = \sqrt{(2R)\cdot(2r)}$ konstruira se primjenom Euklidovog poučka, kako je opisano u konstrukciji problema 2 (Slika 18.).

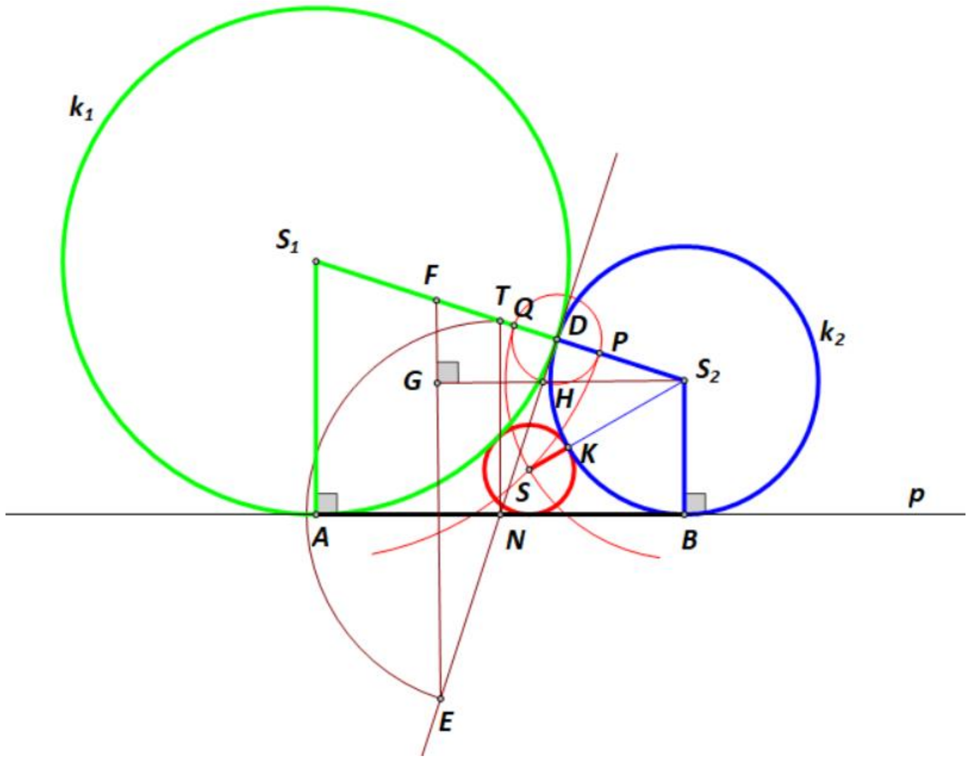
Drugi dio: konstrukcija kružnica k_1 i k_2.

Prema opisu konstrukcije u problemu 2, konstruiraju se kružnice $k_1(S_1, R)$ i $k_2(S_2, r)$ tako da se dodiruju izvana u točki *D*, a pravac *p* diraju u točkama *A* i *B* redom (Slika 19.).

Treći dio: konstrukcija kružnice *k*

Konačno se konstruira kružnica $k(S,t)$ koja izvana dira kružnice k_1 i k_2 te njihovu zajedničku tangentu *p*. Treći dio konstrukcije (upisivanje najmanje kružnice) izveden je prema prijedlogu

Chen Bai, koji je rješenje ponudio 2013., a sama konstrukcija i opis prilagođeni su oznakama koje se koriste u ovom radu[1] (Slika 24.).



Slika 24. Konstrukcija kružnice koja dira dvije kružnice i njihovu zajedničku tangentu

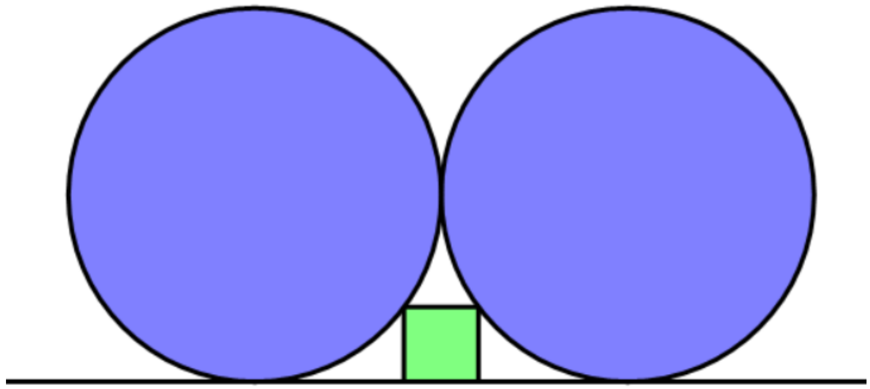
- konstruira se polovište N dužine $\overline{AB}$ i polovište T dužine $\overline{S_1S_2}$
- konstruira se kružnica sa središtem N radijusa $|NT|$, koja u presjeku s pravcem DN daje točku E
- konstruira se polovište F dužine $\overline{S_1D}$ te istakne dužina $\overline{EF}$
- kroz točku S_2 konstruira se okomica na EF, a nožište okomice neka je točka G; okomica GS_2 u presjeku s pravcem DE daje točku H
- konstruira se kružnica sa središtem D i radijusa $|DH|$, koja u presjeku s dužinom $\overline{S_1S_2}$ daje točke P i Q

[1] Originalni opis konstrukcije može se pronaći na linku: https://math.stackexchange.com/questions/269951/sangaku-how-to-draw-those-three-circles-with-only-a-ruler-and-a-compass (Pristupljeno 30.5.2023)

- konstruira se kružnica sa središtem S_1 radijusa $|S_1P|$ i kružnica sa središtem S_2 radijusa $|S_2Q|$, koje u presjeku daju točku S – središte tražene kružnice
- presjek dužine $\overline{SS_2}$ i kružnice k_2 je točka K te je $t = |SK|$ radijus tražene kružnice
- konačno, konstruira se kružnica sa središtem S radijusa t; $k(S,t)$.

Opisanim postupkom konstruirana je cijela sangaku figura.

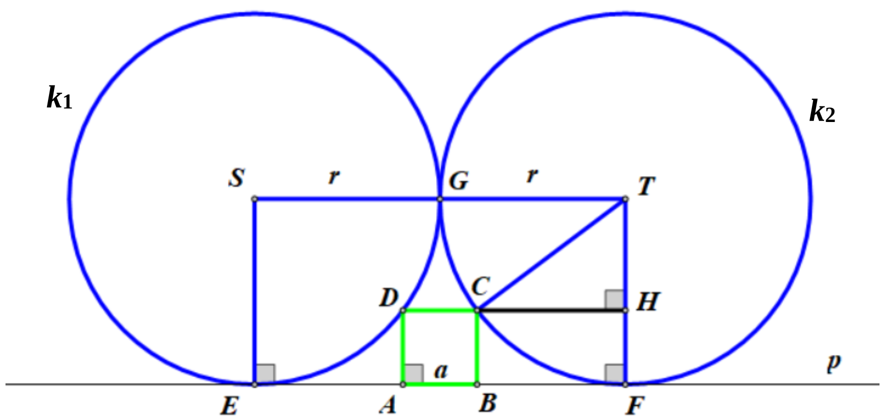
4.4. Problem 4. Dvije sukladne kružnice i kvadrat



Slika 25. Problem 4 - Okayama prefektura, 1873.

Opis problema: Dvije kružnice jednakih radijusa dodiruju se izvana i obje kružnice dodiruju isti pravac. Između njih nalazi se kvadrat tako da jedna stranica kvadrata pripada pravcu, a po jedan od preostala dva vrha kvadrata pripadaju kružnicama. Stranicu kvadrata treba izraziti preko polumjera kružnica (Slika 25.).

Rješenje: Neka su kružnice k_1 sa središtem S i k_2 sa središtem T sukladne kružnice radijusa r, kružnice koje se dodiruju izvana u točki G i koje dodiruju isti pravac p u točkama E i F redom. Neka je $ABCD$ kvadrat stranice duljina a kojemu stranica $\overline{AB}$ pripada pravcu p, a preostala dva vrha C i D kružnicama k_2 i k_1 redom (Slika 26.).



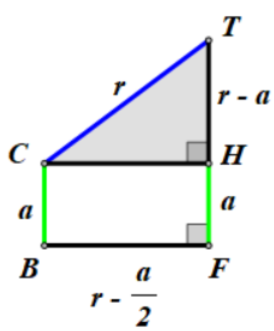
Slika 26. Slika Problema 4 s oznakama

S obzirom na to da kružnice k_1 i k_2 dodiruju isti pravac p, taj pravac je zajednička vanjska tangenta tih dviju kružnica. Prema uvjetu dodira kružnice i tangente, polumjeri povučeni iz dirališta okomiti su na tangentu, zato vrijedi: $\overline{SE} \perp p$ i $\overline{TF} \perp p$. Kako su istaknuti polumjeri okomiti na isti pravac p, oni su međusobno paralelni, tj. $\overline{SE} \parallel \overline{TF}$. A kako su polumjeri i sukladni, $|SE| = |TF| = r$, središta kružnica S i T nalaze na jednakoj udaljenosti od pravca p pa oni pripadaju pravcu koji je paralelan s pravcem p, tj. $ST \parallel p$.

Nadalje, četverokut $SEFT$ je pravokutnik jer su mu nasuprotne stranice paralelne, a kutovi pravi. Prema uvjetu dodira dviju kružnica izvana, središta kružnica S i T te dirالište G kolinearne su točke pa vrijedi: $|ST| = |SG| + |GT| = r + r = 2r$. Kako su nasuprotne stranice pravokutnika jednakih duljina to je $|EF| = |ST| = 2r$. Budući da stranica kvadrata $\overline{AB}$ duljine a pripada pravcu p, odnosno dužini $\overline{EF}$, a zbog simetrije je $|EA| = |BF|$, vrijedi:

$$|BF| = \frac{|EF| - |AB|}{2} = \frac{2r - a}{2} = r - \frac{a}{2} .$$

Neka je CH okomica povučena iz vrha kvadrata C na polumjer $\overline{TF}$. Tada je četverokut $BFHC$ pravokutnik jer su mu nasuprotne stranice paralelne i ima pravi kut. U pravokutniku su nasuprotne stranice jednakih duljina pa vrijedi: $|CH| = |BF| = r - \frac{a}{2}$ i $|FH| = |BC| = a$. Promotrimo istaknuti trokut ΔCHT (Slika 27.).



Slika 27. Izdvojeni pravokutni trokut ΔCHT

Trokut ΔCHT je pravokutan s pravim kutom pri vrhu *H*. Hipotenuza trokuta duljine je $|CT| = r$, jedna kateta duljine je $|CH| = r - \frac{a}{2}$, a druga kateta duljine je $|TH| = |TF| - |FH| = r - a$. Primjenom Pitagorina poučka na stranice trokuta ΔCHT dobiva se:

$$
\begin{aligned}
&(r-a)^2 + \left(r - \frac{a}{2}\right)^2 = r^2 \\
&r^2 - 2ar + a^2 + r^2 - ra + \frac{a^2}{4} = r^2 \\
&r^2 - 3ar + \frac{5}{4}a^2 = 0 \,\Big|\cdot 4 \\
&4r^2 - 12ar + 5a^2 = 0.
\end{aligned}
$$

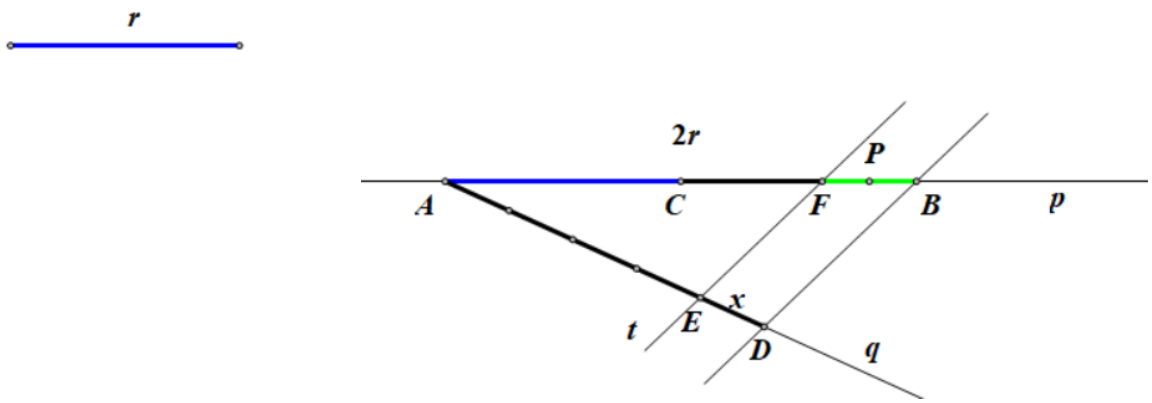
S obzirom na to da se stranica kvadrata duljine *a* želi iskazati preko polumjera sukladnih kružnica radijusa *r*, dobivena kvadratna jednadžba rješava se po *a*:

$$
\begin{aligned}
&5a^2 - 12ra + 4r^2 = 0 \\
&a_{1,2} = \frac{12r \pm \sqrt{144r^2 - 80r^2}}{10} = \frac{12r \pm \sqrt{64r^2}}{10} = \frac{12r \pm 8r}{10} = \frac{6r \pm 4r}{5} \\
&a_1 = \frac{6r - 4r}{5} = \frac{2}{5}r \\
&a_2 = \frac{6r + 4r}{5} = \frac{10r}{5} = 2r
\end{aligned}
$$

Budući da je kvadrat upisan u prostor između dviju kružnica i pravca, duljina stranice kvadrata je manja od polumjera sukladnih kružnica, tj. $a < r$. Stoga rješenje $a = 2r$ nije moguće te preostaje samo jedno rješenje: $a = \frac{2}{5}r$, odnosno $5a = 2r$. To znači da je promjer sukladnih kružnica pet puta veći od stranice upisanog kvadrata.

Konstrukcija: Prije konstrukcije sangaku figure potrebno je konstruirati dužinu koja odgovara stranici kvadrata. Dužina duljine $a = \frac{2}{5}r$ konstruira se kao petina promjera zadane kružnice, $a = \frac{1}{5} \cdot 2r$. Neka je zadan polumjer sukladnih kružnica *r*.

Prvi dio: konstrukcija dužine duljine $a=\frac{2}{5}r$ (Slika 28.).

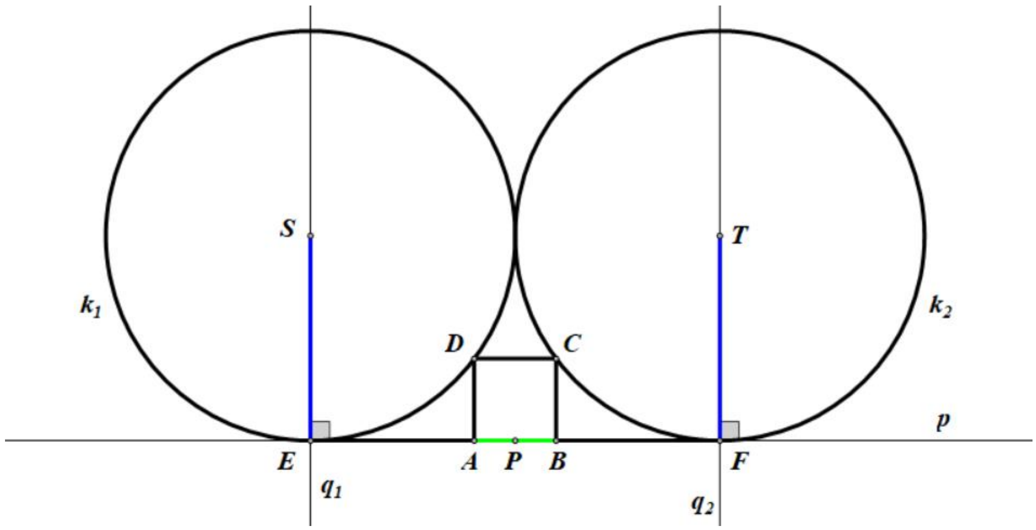


Slika 28. Konstrukcija dužine duljine $a=\frac{2}{5}r$

- na proizvoljni pravac *p* prenese se dužina duljine *r* dva puta počevši od proizvoljne točke *A*, $|AB|=2r$
- na pomoćni polupravac *Aq* nanese se uzastopno pet sukladnih dužina počevši od točke *A*, $|ED|=x$, $|AD|=5x$
- konstruira se pravac *t* paralelan s pravcem *BD* kroz točku *E*
- pravac *t* siječe pravac *p* u točki *F* i dužina $\overline{FB}$ je petina dužine $\overline{AB}$, tj. vrijedi: $a=|FB|=\frac{2}{5}r$
- konstruira se i polovište *P* dužine $\overline{FB}$, $\frac{a}{2}=|FP|=|PB|=\frac{1}{5}r$

Drugi dio: konstrukcija sangaku figure (Slika 29.)

- na proizvoljni pravac *p* prenese se dva puta uzastopno dužina duljine *r*, $|EP|=|PF|=r$
- kroz *E* i *F* konstruiraju se okomice q_1 i q_2 na pravac *p*
- na okomice q_1 i q_2 prenese se dužina duljine *r*, $|ES|=r$, $|FT|=r$
- opišu se kružnice sa središtima *S* i *T* radijusa *r*, $k_1(S,r)$ i $k_2(T,r)$



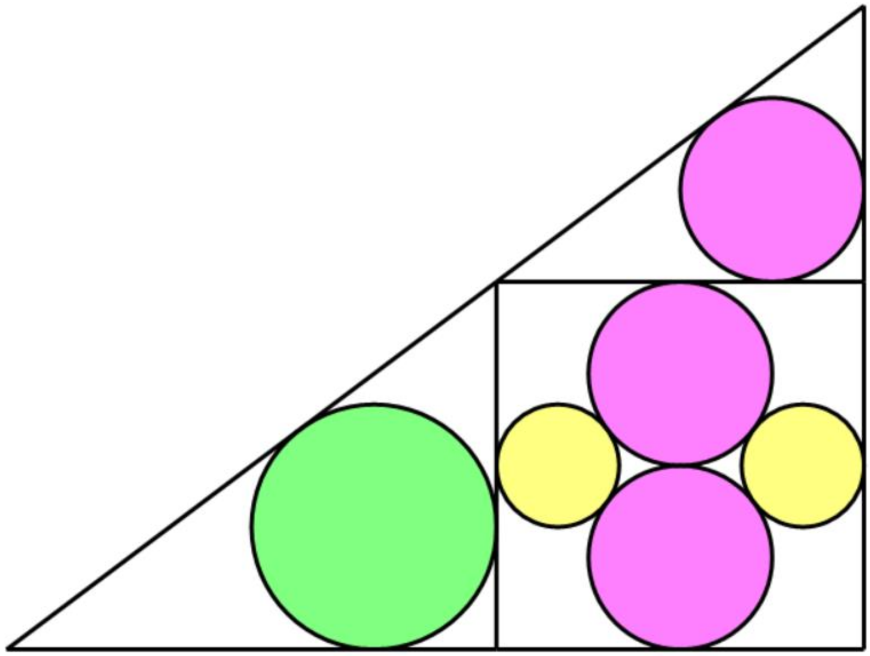
Slika 29. Konstrukcija sangaku figure 4

- iz točke P konstruira se kružnica radijusa $\frac{a}{2}$ koja u presjeku s pravcem p daje dva vrha kvadrata A i B
- iz točaka A i B opišu se kružnice radijusa a, koje u presjeku s kružnicama k_1 i k_2 daju preostala dva vrha kvadrata D i C redom: $k(A,a)\cap k_1=\{D\}, k(B,a)\cap k_2=\{C\}$

  četverokut $ABCD$ konstruiran na opisani način jest kvadrat.

Opisanim postupkom konstruirana je cijela sangaku figura.

4.5. Problem 5. Šest kružnica unutar kvadrata i pravokutnih trokuta



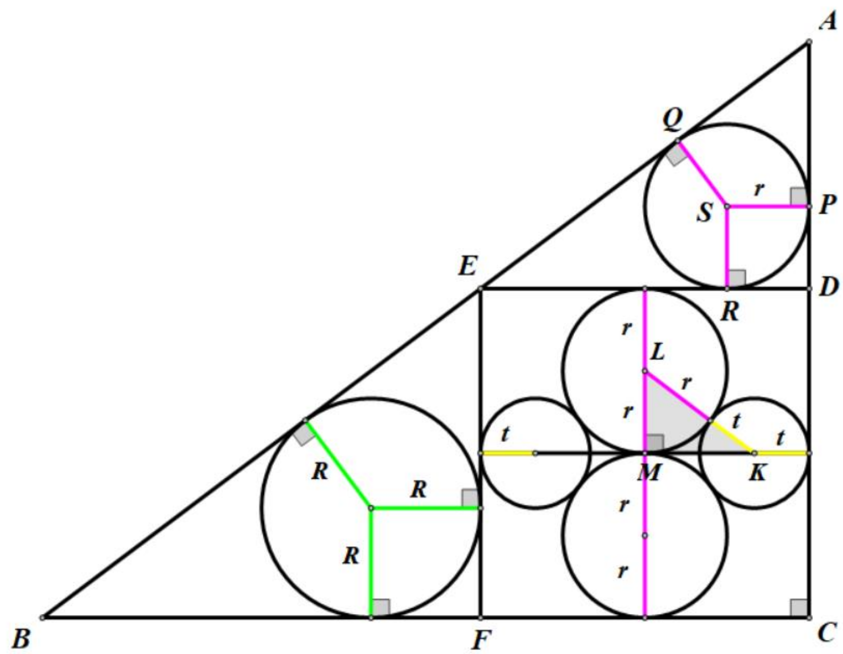
Slika 30. Problem 5 - Iwate prefektura, 1847.

Opis problema: Dva para kružnica radijusa *r* i *t*, $r > t$, upisani su u kvadrat, a kvadrat je upisan u trokut kako je prikazano na slici. Po jedna kružnica radijusa *R* i *r*, $R > r$, upisane su u manje pravokutne trokute izvan kvadrata. Polumjer najveće kružnice treba izraziti preko polumjera najmanje kružnice (Slika 30.).

Ovaj problem postavio je trinaestogodišnji dječak Sato Naosue, a izložen je 1847. u hramu u Akahagi u gradu Ichinoseki (Fameli, 2020).

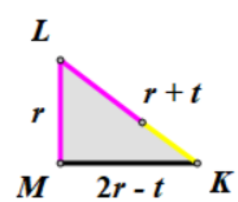
Rješenje: Neka je kvadrat *CDEF* stranice duljine *a* upisan u trokut ΔABC. Neka su kružnice upisane u kvadrat *CDEF* radijusa *r* i *t*, a kružnice upisane u trokute ΔBFE i ΔAED izvan kvadrata radijusa *R* i *r* redom tako da za radijuse kružnica vrijedi: $R > r > t$ (Slika 31.).

Kako kružnice radijusa *r* dodiruju stranicu kvadrata *CDEF* iznutra, a one se međusobno dodiruju izvana vrijedi: $a = 4r$. To znači da je duljina stranice kvadrata *a* četiri puta veća od radijusa *r*, odnosno, radijus *r* je četiri puta manji od stranice kvadrata *CDEF*, $r = \frac{a}{4}$.



Slika 31. Slika Problema 5 s oznakama

S obzirom na uvjet dodira dviju kružnica te kružnica i stranica kvadrata, istaknute dužine unutar kvadrata okomite su na odgovarajuće stranice kvadrata, međusobno su okomite i duljine su $4r$. Stoga je osjenčani trokut ΔKLM, koji je određen središtima kružnica K i L te sjecištem istaknutih dužina M, pravokutan trokut s katetama duljine $|ML| = r$ i $|MK| = \frac{4r-2t}{2} = 2r - t$ te hipotenuzom duljine $|KL| = r + t$ (Slika 32.).



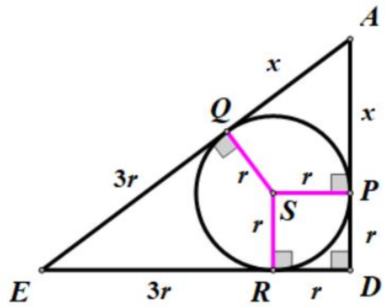
Slika 32. Izdvojeni trokut ΔKLM

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ΔKLM određuje se odnos između polumjera kružnica upisanih u kvadrat:

$$r^2+(2r-t)^2=(r+t)^2$$
$$r^2+4r^2-4rt+t^2=r^2+2rt+t^2$$
$$4r^2-6rt=0 \,|: 2r, r\neq 0$$
$$2r-3t=0$$
$$2r=3t$$
$$r=\frac{3}{2}t.$$

Ako bi radijus t izrazili preko radijusa r dobiva se $t=\frac{2}{3}r$, što znači da je polumjer najmanje kružnice veličine $\frac{2}{3}$ polumjera srednje kružnice radijusa r.

Dalje se razmatra trokut ΔAED izvan kvadrata u kojeg je upisana kružnica radijusa r.



Slika 33. Izdvojeni trokut ΔAED

Prema teoremu o odsječcima tangenti povučenih kroz točku izvan kružnice vrijedi: odsječci tangenti od točke izvan kružnice do dirališta s kružnicom jednakih su duljina. S obzirom na to da stranice trokuta pripadaju tangentama upisane kružnice koje su povučene kroz točke izvan trokuta (vrhovi trokuta) i s obzirom na to da su polumjeri povučeni iz dirališta okomiti na tangentu, u trokutu ΔAED, kojemu je jedna kateta duljine $|ED|=a=4r$, vrijedi:

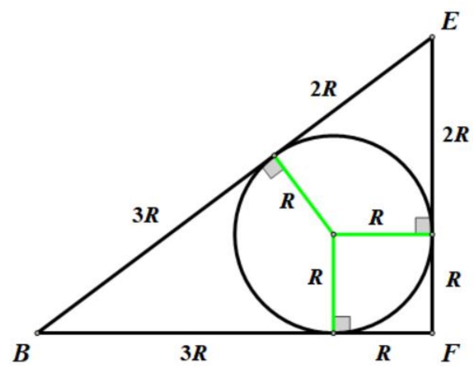
$$|RD|=|DP|=r$$
$$|EQ|=|ER|=|ED|-|RD|=4r-r=3r$$
$$|AP|=|AQ|=x.$$

Kako je trokut ΔAED pravokutan, primjenom Pitagorina poučka na duljine njegovih stranica može se odrediti nepoznata duljina x:

$$
\begin{aligned}
&(4r)^2 + (r+x)^2 = (3r+x)^2 \\
&16r^2 + r^2 + 2rx + x^2 = 9r^2 + 6rx + x^2 \\
&8r^2 = 4rx \,|: 4r, r \neq 0 \\
&2r = x.
\end{aligned}
$$

Dakle, odsječak duljine x jednak je promjeru upisane kružnice $2r$, a za stranice trokuta ΔAED vrijedi: katete su duljina $|AD| = 3r$ i $|ED| = 4r$, a hipotenuza je duljine $|AE| = 5r$.

Još preostaje odrediti radijus najveće kružnice R koja je upisana u trokut ΔBFE. Pravokutni trokuti ΔBFE i ΔEDA imaju podudarne odgovarajuće kutove pa su slični prema poučku KK. Kako slični trokuti imaju proporcionalne stranice, analognim zaključivanjem kao pri određivanju duljina stranica trokuta ΔEDA, određuju se i duljine stranica trokuta ΔBFE (Slika 34.).



Slika 34. Izdvojeni trokut ΔBFE

Dakle, za stranice trokuta ΔBFE vrijedi: katete su duljina $|EF| = 3R$ i $|BF| = 4R$, a hipotenuza je duljine $|BE| = 5R$. Kako je dužina $\overline{EF}$ istodobno i stranica trokuta i stranica kvadrata, njezina duljina je s jedne strane $3R$, a s druge strane $a = 4r$. Izjednačavanjem i sređivanjem, uz poznatu vezu da je $r = \frac{3}{2}t$, dobiva se:

$$
\begin{aligned}
&3R = 4r \\
&R = \frac{4}{3}r \\
&R = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}t \\
&R = 2t.
\end{aligned}
$$

Dakle, polumjer najveće kružnice dvostruko je veći od polumjera najmanje kružnice, odnosno, polumjer najveće kružnice duljine R jednak je promjeru najmanje kružnice duljine $2t$.

Konstrukcija: Neka je zadana stranica kvadrata duljine a. Kako je $a = 4r$, za duljine polumjera upisanih kružnica vrijedi:

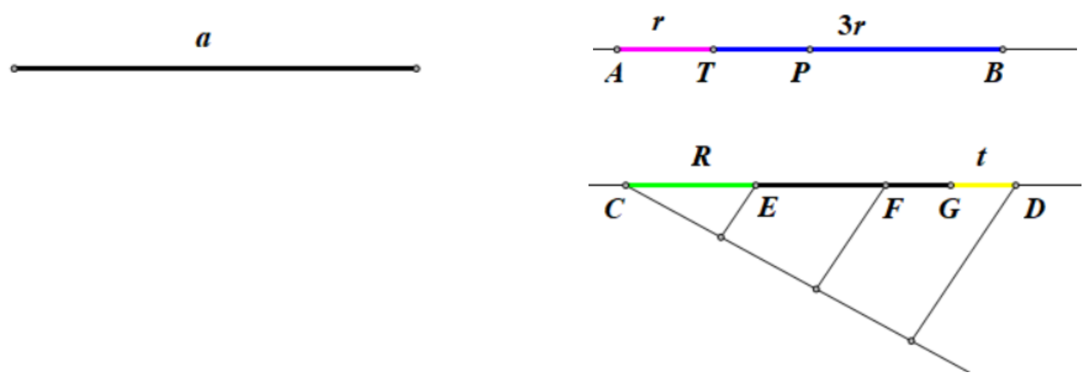
$$r = \frac{a}{4}$$

$$t = \frac{2}{3} \cdot r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{6}, \text{ odnosno } t = \frac{a}{6}$$

$$R = 2t = 2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{a}{3}, \text{ odnosno } R = \frac{a}{3}.$$

Sada se najprije konstruiraju dužine koje su polumjeri upisanih kružnica, a zatim se može konstruirati cijela sangaku figura.

Prvi dio: konstrukcija polumjera upisanih kružnica (Slika 35.)

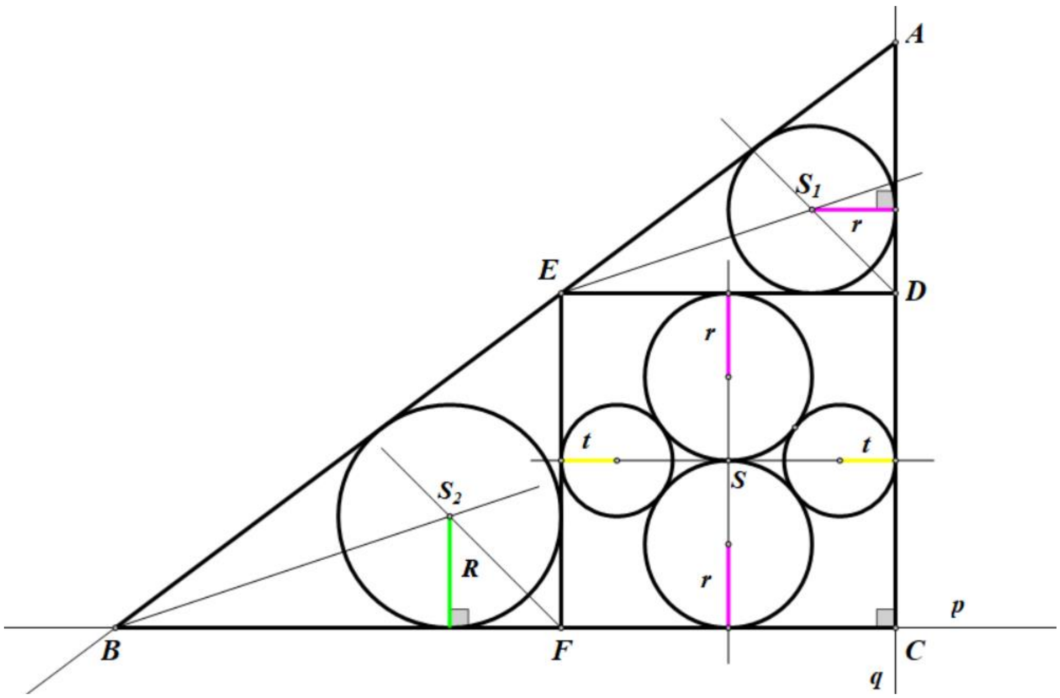


Slika 35. Konstrukcija polumjera upisanih kružnica

- na proizvoljni pravac prenese se dužina duljine a od točke A, $|AB| = a$
- simetralom dužine $\overline{AB}$ konstruira se polovište dužine P
- simetralom dužine $\overline{AP}$ konstruira se polovište dužine T čime se dobiva četvrtina dužine, a ostatak su tri četvrtine dužine, tj. vrijedi: $|AT| = r$, $|TB| = 3r$
- na drugi proizvoljni pravac ponovno se prenese dužina duljine a od točke C, $|CD| = a$

- korištenjem pomoćnog polupravca iz točke C (ili D) dužina $\overline{CD}$ podijeli se na tri jednaka dijela, $|CE| = |EF| = |FD| = R$
- simetralom dužine $\overline{FD}$ konstruira se polovište dužine G, čime se dobiva šestina dužine $\overline{CD}$, tj. vrijedi: $|FG| = |GD| = t$.

Drugi dio: konstrukcija cijele sangaku figure (Slika 36.).



Slika 36. Konstrukcija sangaku figure 5

Konstrukcija kvadrata $CDEF$:

- na proizvoljni pravac p prenese se dužina duljine a od točke F, $|FC| = a$
- kroz točku C konstruira se okomica q na pravac p
- na okomicu q prenese se dužina duljine a od točke C, $|CD| = a$
- iz točaka D i F konstruiraju se kružnice radijusa a, sjecište tih kružnica je točka E četverokut $CDEF$ konstruiran na opisani način jest kvadrat.

Konstrukcija trokuta ΔABC:

- na pravac q prenese se dužina duljine $3r$ od točke D, $|DA| = 3r$

- polupravac *AE* siječe pravac *p* u točki *B*

  trokut ΔABC je pravokutni trokut u koji je upisan kvadrat *CDEF*.

Konstrukcija kružnica upisanih u kvadrat:

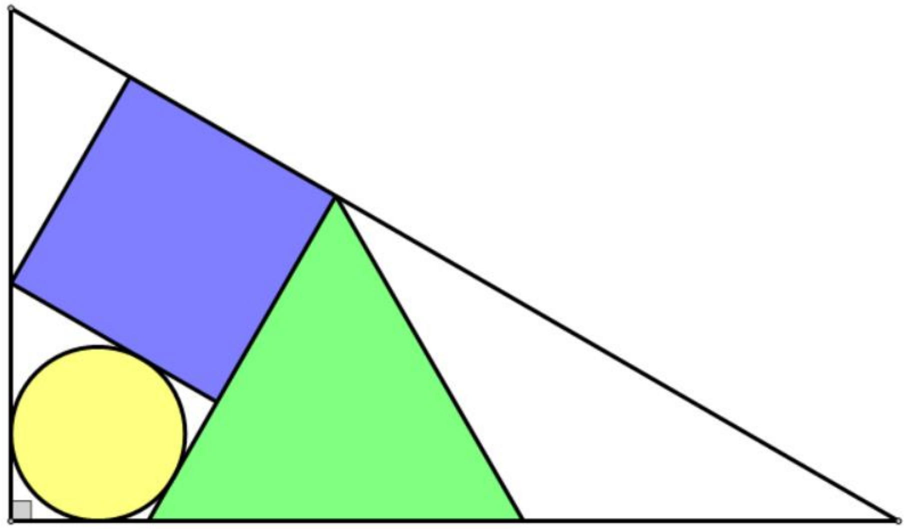
- konstruiraju se simetrale stranica kvadrata *CDEF,* točka *S* sjecište simetrala
- iz polovišta stranica kvadrata opišu se kružnice radijusa *r* i *t* kako bi se dobila središta odgovarajućih kružnica
- iz dobivenih središta opišu se parovi kružnica radijusa *r* i *t*.

Konstrukcija kružnica upisanih u trokute ΔAED i ΔBFE izvan kvadrata:

- unutar svakog trokuta ΔAED i ΔBFE konstruiraju se simetrale kutova (barem po dvije) kako bi se dobilo središte upisanih kružnica S_1 i S_2 redom
- iz središta S_1 i S_2 opišu se kružnice radijusa *r* i *R* redom: $k(S_1, r)$, $k(S_2, R)$.

Opisanim postupkom konstruirana je zadana sangaku figura.

4.6. Problem 6. Trokut, kvadrat i krug unutar pravokutnog trokuta



Slika 37. Problem 6 - Fukushima prefektura, 1877.

Opis problema: Kvadrat, jednakostranični trokut i krug upisani su u pravokutni trokut kako je prikazano na slici. Stranicu jednakostraničnog trokuta i polumjer kruga te stranice pravokutnog trokuta iskazati preko stranice kvadrata (Slika 37.).

Rješenje: Neka je ΔABC pravokutni trokut u kojeg su upisani jednakostranični trokut ΔDEF stranice duljine *a*, kvadrat *FGHR* stranice duljine *b* i kružnica radijusa *r* sa središtem *S* (Slika 38.).

S obzirom da je trokut ΔDEF jednakostranični, njegovi unutrašnji kutovi su po 60°, a četverokut *FGHR* je kvadrat pa su njegovi kutovi pravi, veličine 90°. Primjenom odgovarajućih pravila određuju se kutovi u trokutu ΔAFE :

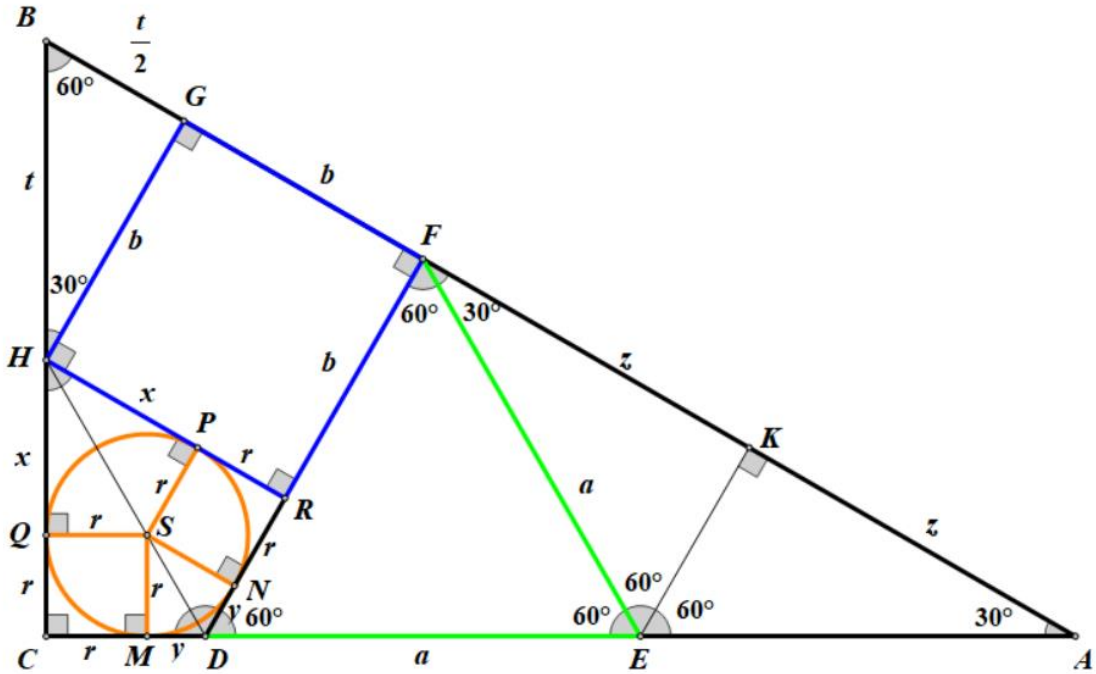
$\measuredangle AEF = 180° - 60° = 120°$ (vanjski kut trokuta ΔDEF pri vrhu *E*),

$\measuredangle EFA = 180° - (90° + 60°) = 180° - 150° = 30°$ (nadopuna do ispruženog kuta pri vrhu *F*)

$\measuredangle FAE = 180° - (120° + 30°) = 180° - 150° = 30°$ (zbroj kutova unutar trokuta).

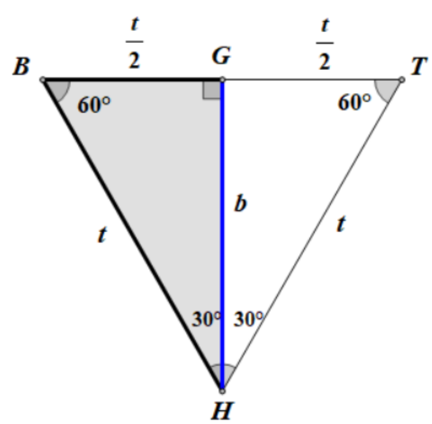
Kako su kutovi prvi vrhovima *A* i *F* trokuta ΔAFE jednakih veličina (po 30°), nasuprotne stranice jednakih u duljina pa vrijedi: $|AE| = |EF| = a$, što znači da je trokut ΔAFE jednakokračan.

Trokut ΔABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu *C*, a kako je šiljasti kut pri vrhu *A* veličine 30°, njegov drugi šiljasti kut pri vrhu B je veličine $90° - 30° = 60°$.



Slika 38. Slika Problema 6 s oznakama

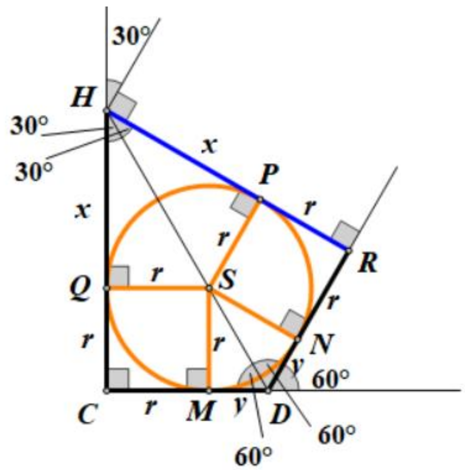
Trokut ΔBHG je pravokutan s pravim kutom pri vrhu *G* (susjedni kut pravog kuta kvadrata *FGHR*), a kako je šiljasti kut pri vrhu *B* veličine 60°, njegov drugi šiljasti kut pri vrhu *H* veličine je: $90° - 60° = 30°$. To znači da je trokut ΔBHG polovica jednakostraničnog trokuta. Ako je njegova hipotenuza $\overline{BH}$ duljine *t*, onda je kraća kateta $\overline{BG}$ duljine $\frac{t}{2}$, a duža kateta $\overline{GH}$ je stranica kvadrata *FGHR* duljine *b*.



Slika 39. Nadopuna ΔBHG do jednakostraničnog trokuta

Nadopunjavanjem trokuta ΔBHG zrcalno do trokuta ΔBHT (Slika 39.) dobiva se jednakostranični trokut stranice duljine *t*, kojemu je dužina $\overline{GH}$ visina duljine *b* pa vrijedi: $b=\frac{t\sqrt{3}}{2}$. Iz tog odnosa slijedi da je $t=\frac{2}{\sqrt{3}}b$, odnosno nakon racionaliziranja, $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$ i $\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}b$. Prema tome, stranice trokuta ΔBHG su: $|BH|=t=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$, $|BG|=\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}b$ i $|GH|=b$.

Četverokutu *CDRH* upisana je kružnica radijusa *r* pa je tangencijalan te je zbroj nasuprotnih kutova tog četverokuta 180°.



Slika 40. Tangencijalni četverokut *CDRH*

Unutarnji kut četverokuta *CDRH* prvi vrhu *C* je pravi kut (kut trokuta ΔABC), kao i kut pri vrhu *R* (susjedni kut pravog kuta kvadrata *FGHR*). Unutarnji kut pri vrhu *D* je vanjski kut trokuta ΔAFD pa je on veličine $180°-60°=120°$, pa unutarnji kut pri vrhu *H* iznosi $180°-(90°+30°)=180°-120°=60°$.

Kako su odsječci tangenti na kružnicu povučenih iz točke izvan kružnice (u ovom slučaju iz vrhova četverokuta *CDRH*) jednakih duljina vrijedi:

$|QC|=|CM|=r$ jer je *QCMS* kvadrat i $|PR|=|RN|=r$ jer je *PSNR* kvadrat

$|MD|=|DN|=y$ i $|HQ|=|HP|=x$.

Dijagonala $\overline{HD}$ dijeli četverokut *CDRH* na dva sukladna trokuta, $\Delta CDH \cong \Delta DRH$, prema poučku *SKS* jer se trokuti podudaraju u dvije stranice i kutu među njima:

$$\begin{aligned} &|HC| = |HR| = x + r \\ &\measuredangle DCH = \measuredangle HRD = 90^\circ \\ &|CD| = |DR| = y + r. \end{aligned}$$

Iz sukladnosti slijedi da dijagonala $\overline{HD}$ raspolavlja kutove pri vrhovima *H* i *D* pa su trokuti ΔCDH i ΔDRH pravokutni trokuti sa šiljastim kutovima od 30° i 60°.

Kako je $x + r = b$, slijedi da je $|HC| = |HR| = |HG| = b$ pa su trokuti ΔCDH i ΔDRH sukladni s trokutom ΔBGH po poučku *KSK* jer se podudaraju u jednoj stranici i kutovima uz tu stranicu. Iz sukladnosti i prethodno izvedenih jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} &|DH| = |BH| = t = \frac{2\sqrt{3}}{3} b \\ &|CD| = |DR| = |BG| = \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} b. \end{aligned}$$

Prema prethodnoj analizi može se odrediti duljina *a* stranice jednakostraničnog trokuta ΔEFD jer vrijedi:

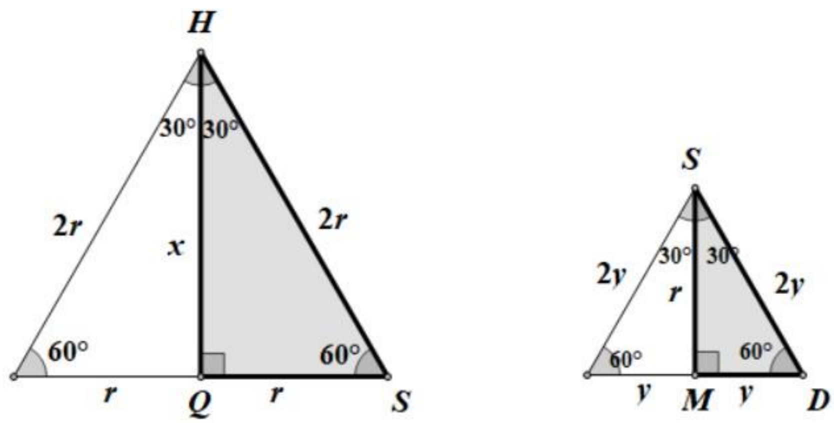
$$a = |FD| = |FR| + |RD| = b + \frac{t}{2} = b + \frac{\sqrt{3}}{3} b = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) b\,.$$

Ako se u jednakokračnom trokutu ΔAFE spusti visina $\overline{EK}$ na osnovicu $\overline{AF}$, dobivaju se dva pravokutna trokuta koji su polovice jednakostraničnog trokuta stranice duljine *a*, a $\overline{FK}$ je visina duljine *z* pa vrijedi (analogno kao kod trokuta ΔBHT):

$$\begin{aligned} &z = |FK| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) b \\ &2z = \left(\sqrt{3} + 1\right) b. \end{aligned}$$

Za iskazivanje polumjera kružnice *r*, a zatim i stranica trokuta ΔABC preko stranice kvadrata *FGHR* duljine *b*, potrebno je izraziti duljine *x* i *y* preko duljine *b*. U tu svrhu se mogu promotriti trokuti ΔHQS i ΔMDS. Oba trokuta su pravokutna sa šiljastim kutovima 30° i 60° pa su i oni polovice jednakostraničnih trokuta.

Nadopunjavanjem trokuta ΔHQS dobiva se jednakostranični trokut stranice duljine 2*r*, kojemu je visina duljine *x* pa vrijedi: $x = \frac{2r\sqrt{3}}{2}$, odnosno $x = r\sqrt{3}$. Analogno, nadopunjavanjem trokuta ΔMDS dobiva se jednakostranični trokut stranice duljine 2*y*, kojemu je visina duljine *r* pa vrijedi: $r = \frac{2y\sqrt{3}}{2}$, odnosno $r = y\sqrt{3}$, odakle se dobiva $y = \frac{\sqrt{3}}{3}r$ (Slika 41.).



Slika 41. Nadopuna trokuta ΔHQS i ΔMDS

Kako je $b = x + r = r\sqrt{3} + r = r\left(\sqrt{3}+1\right)$, za radijus kružnice *r* dobiva se $r = \frac{b}{\sqrt{3}+1}$ te nakon racionaliziranja: $r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}b$ pa je promjer kružnice duljine: $2r = \left(\sqrt{3}-1\right)b$.

Konačno, na temelju svih izvedenih izraza, stranice trokuta ΔABC mogu se izraziti preko stranice kvadrata *FGHR* duljine *b*:

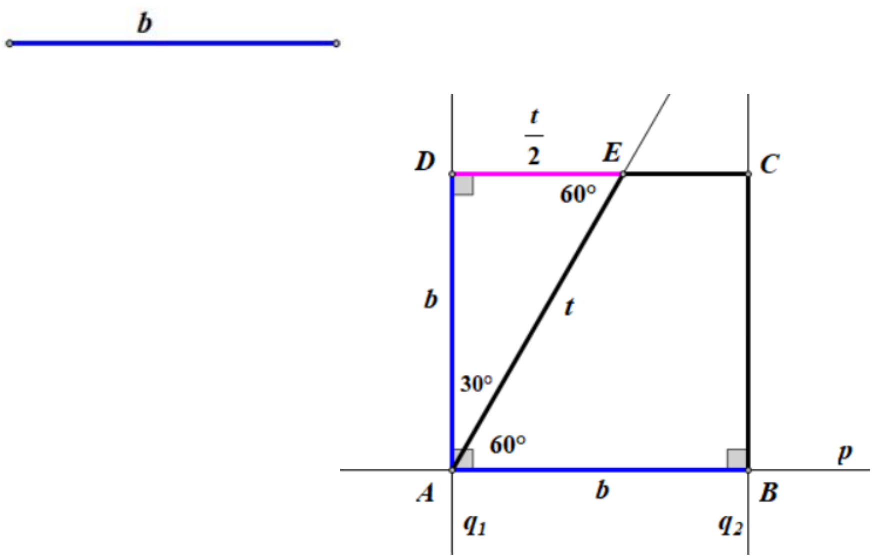
$$|AB| = \frac{t}{2} + b + 2z = \frac{\sqrt{3}}{3}b + b + \left(\sqrt{3}+1\right)b = 2b + \frac{4\sqrt{3}}{3}b$$

$$|AC| = 2a + \frac{t}{2} = 2\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)b + \frac{\sqrt{3}}{3}b = 2b + \frac{2\sqrt{3}}{3}b + \frac{\sqrt{3}}{3}b = 2b + \sqrt{3}b$$

$$|BC| = b + t = b + \frac{2\sqrt{3}}{3}b\,.$$

Konstrukcija: Neka je zadana dužina duljine *b*. Konstrukcija se temelji na izvedenim odnosima svih potrebnih duljina preko duljine *b*. Prvo se konstruiraju sve potrebne dužine duljina t, $\frac{t}{2}$, a i *z*, zatim dužine koje odgovaraju stranicama trokuta ΔABC i konačno, cijela sangaku figura.

Prvi dio: konstrukcija kvadrata stranice duljine *b* i dužina duljine t i $\frac{t}{2}$ (Slika 43.).



Slika 43. Konstrukcija kvadrata *ABCD* i dužina duljina *t* i $\frac{t}{2}$

- na proizvoljan pravac *p* prenese se dužina duljine *b* počevši od točke *A*, $|AB| = b$
- u krajnjim točkama *A* i *B* konstruiraju se okomice q_1 i q_2 na pravac *p*
- na svaku okomicu prenese se dužina duljine *b*, od točaka *A* i *B*, $|AD| = b$ i $|BC| = b$

  četverokut *ABCD* konstruiran na opisani način jest kvadrat stranice duljine *b*
- zatim se iz vrha *A* konstruira kut od 60°, s pravcem *p* kao prvim krakom
- drugi krak siječe stranicu kvadrata u točki *E*.

  trokut ΔAED je pravokutan sa šiljastim kutovima od 30° i 60° i vrijedi:

$$|AE| = t = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$$

$$|DE| = \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}b.$$

Drugi dio: konstrukcija dužina duljine *a* i 2*z* te stranica trokuta ΔABC (Slika 44.).

Na proizvoljni pravac uzastopno se nanose dužine navedenih duljina:

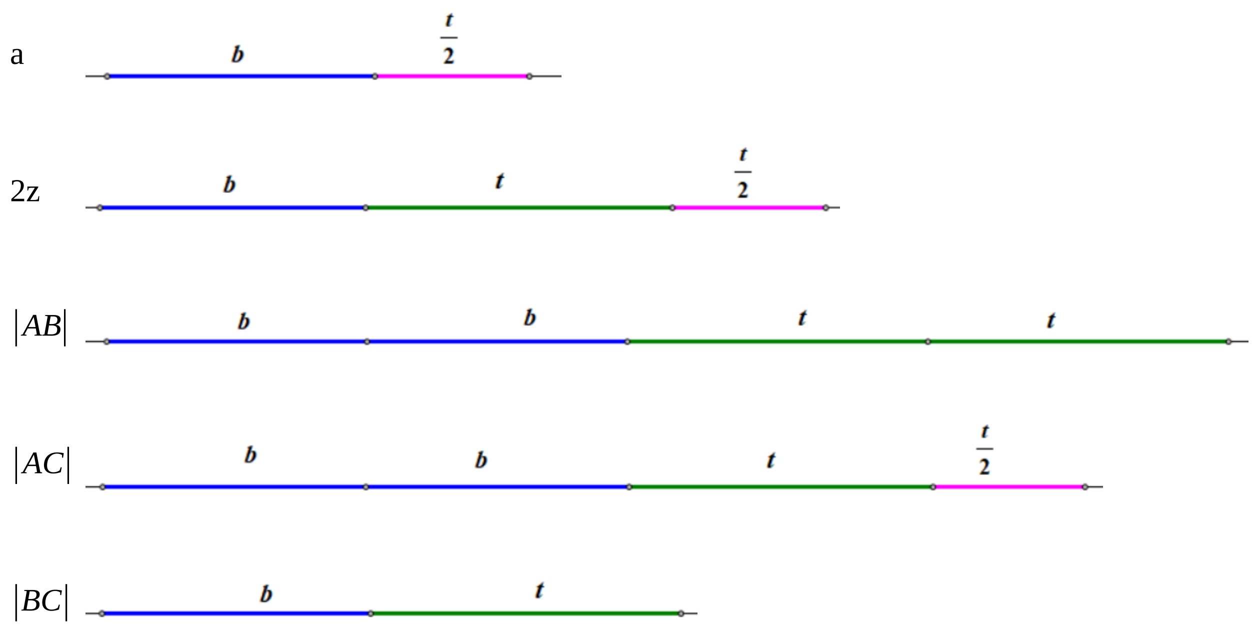
$$a = b + \frac{\sqrt{3}}{3} b = b + \frac{t}{2}$$

$$2z = b + \sqrt{3} b = b + t + \frac{t}{2}$$

$$|AB| = 2b + \frac{4\sqrt{3}}{3} b = 2b + 2t$$

$$|AC| = 2b + \sqrt{3} b = 2b + t + \frac{t}{2}$$

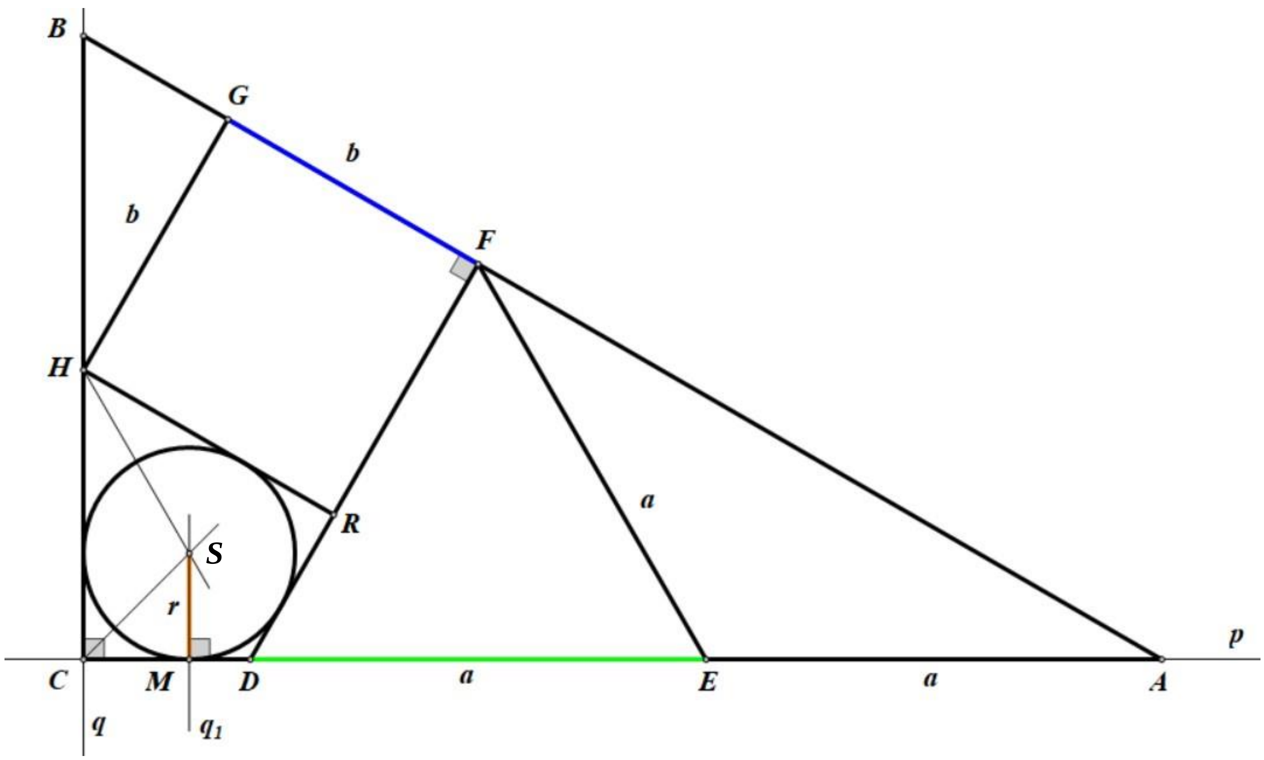
$$|BC| = b + \frac{2\sqrt{3}}{3} b = b + t$$



Slika 44. Konstrukcija dužina odgovarajućih duljina

Treći dio: konstrukcija cijele sangaku figure (Slika 45.)

Prvo se konstruira trokut ΔABC prema konstrukciji *SSS* jer su poznate duljine njegovih stranica: $|AB|$, $|AC|$ i $|BC|$ ili prema *SKS* jer je jedan njegov kut pravi kut. Zatim se u njega upišu jednakostranični trokut ΔFDE stranice duljine *a*, kvadrat *FGHR* stranice duljine *b* i konačno kružnica $k(S,r)$.



Slika 45. Konstrukcija sangaku figure 6

Konstrukcija pravokutnog trokuta ΔABC:

- na proizvoljan pravac *p* prenese se dužina duljine $|AC|$ počevši od točke *A*
- kroz točku *C* konstruira se okomica *q* na pravac *p*
- na pravac *q* prenese se dužina duljine $|BC|$ počevši od točke *C*

Konstrukcija jednakostraničnog trokuta ΔEFD:

- iz vrha *A* prenose se dužine duljine *a* na dužinu $\overline{AC}$, $|AE| = a$

- iz točke E opiše se kružnica radijusa a, koja stranicu $\overline{AB}$ siječe u točki F, a stranicu $\overline{AC}$ u točki D

  ΔDEF je jednakostranični trokut stranice duljine a

Konstrukcija kvadrata $FGHR$:

- iz točke F opiše se kružnica radijusa b, koja siječe dužinu $\overline{FB}$ u točki G, a dužinu $\overline{FD}$ u točki R
- Iz točke G ili R opiše se kružnica radijusa b, koja dužinu $\overline{BC}$ siječe u točki H

  Četverokut $FGHR$ jest kvadrat stranice duljine b

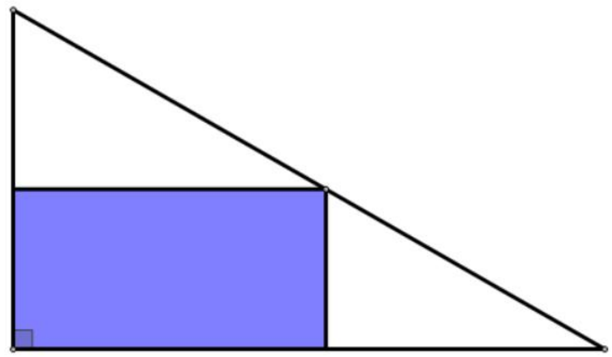
Konstrukcija kruga $k(S,r)$:

- simetralom dvaju kutova četverokuta $CDRH$ dobiva se središte kružnice S
- kroz točku središta S konstruira se okomica na jednu stranicu trokuta s nožištem M,

  $r = |SM|$ je radijus kružnice upisane četverokutu $CDRH$.
- Opiše se kružnica $k(S,r)$

Opisanim postupkom konstruirana je zadana sangaku figura.

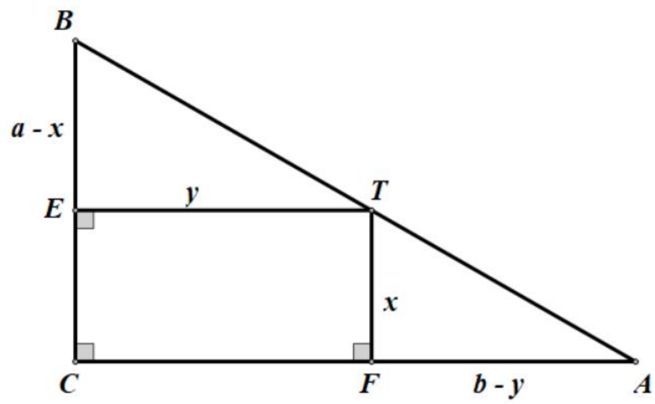
4.7. Problem 7. Pravokutnik maksimalne površine unutra pravokutnog trokuta



Slika 46. Problem 7 - Hokkaido Prefektura, 1806.

Opis problema: Na hipotenuzi pravokutnog trokuta odabrana je proizvoljna točka, a zatim su iz točke spuštene okomice na katete trokuta. Okomice s katetama trokuta zatvaraju pravokutnik. Odrediti položaj točke na hipotenuzi koja određuje pravokutnik maksimalne površine (Slika 46.).

Rješenje: Neka je dan pravokutni trokut ΔABC s katetama duljine $|BC| = a$ i $|AC| = b$. Neka je T proizvoljna točka na hipotenuzi $\overline{AB}$ i neka su E i F nožišta okomica spuštenih iz točke T na katete $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom. Neka je udaljenost točke T od katete $\overline{AC}$ jednaka x, a udaljenost od katete $\overline{BC}$ jednaka y, tj. $|TF| = x$ i $|TE| = y$ (Slika 47.).



Slika 47. Slika Problema 7 s oznakama

U skladu s uvedenim oznakama, četverokut $CFTE$ je pravokutnik duljine y i širine x te mjera njegove površine iznosi $P_{CFTE} = xy$. Kako bi se odredio pravokutnik maksimalne površine, potrebno je odrediti udaljenosti x i y u odnosu na duljine kateta a i b redom, pravokutnog trokuta ΔABC.

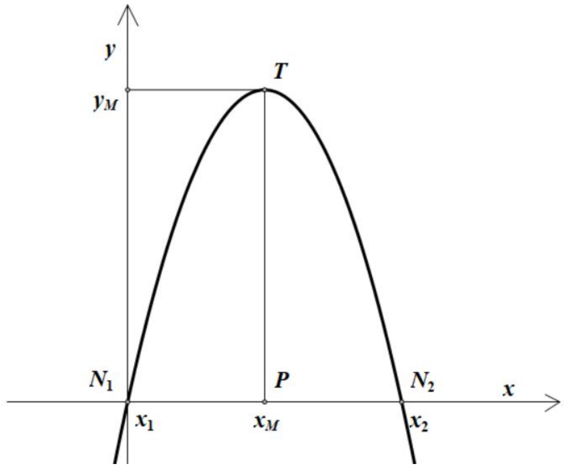
Povlačenjem okomica, unutar trokuta ΔABC nastala su dva manja pravokutna trokuta: ΔBET s katetama duljina $|BE| = a - x$ i $|TE| = y$ te ΔATF s katetama duljina $|AF| = b - y$ i $|TF| = x$. Ovi pravokutni trokuti slični su s polaznim trokutom prema poučku KK (jer imaju podudarne odgovarajuće kutove). Iz sličnosti trokuta ΔBET i ΔABC može se uspostaviti odnos između udaljenosti x i y:

$$\begin{aligned} \frac{|TE|}{|AC|} &= \frac{|BE|}{|BC|} \\ \frac{y}{b} &= \frac{a-x}{a} \\ ay &= ab - bx \\ y &= b - \frac{b}{a}x. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem izvedenog odnosa u izraz za površinu pravokutnika $CFTE$ dobiva se:

$$P_{CFTE} = x \cdot y = x \cdot \left(b - \frac{b}{a}x \right) = bx - \frac{b}{a}x^2 = \frac{b}{a}\left(ax - x^2 \right).$$

Dobiveni se izraz može razmatrati kao kvadratna funkcija površine P po varijabli x: $P(x) = \frac{b}{a}\left(ax - x^2 \right)$, pa se polazni problem svodi na pronalaženje maksimuma ove kvadratne funkcije. S obzirom na to da je vodeći koeficijent ove kvadratne funkcije negativan, graf funkcije je konkavan pa maksimum postoji (Slika 48.).



Slika 48. Graf funkcije površine

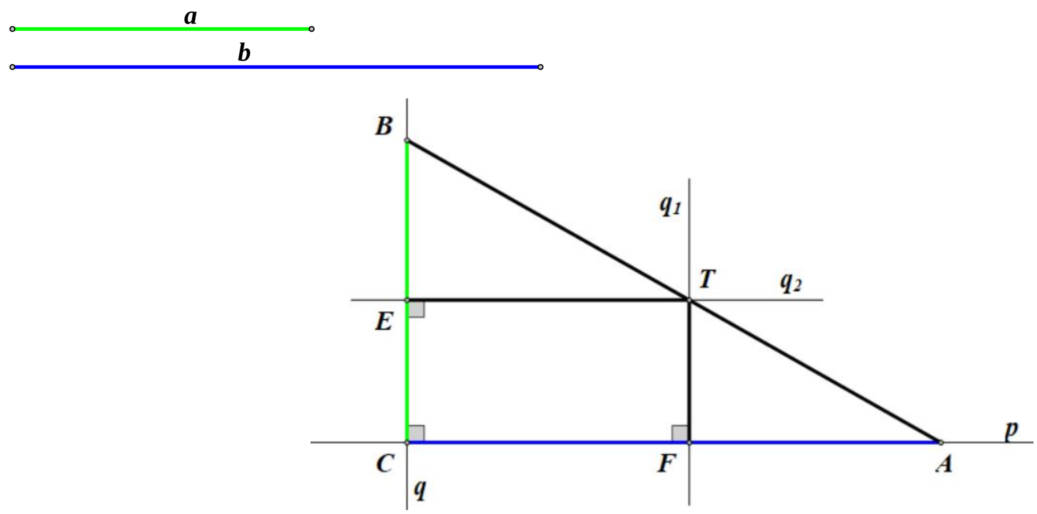
Kako je graf kvadratne funkcije simetričan s obzirom na pravac koji prolazi točkom maksimuma $T(x_M, y_M)$, koordinata x_M biti će koordinata i točke $P(x_M, 0)$ koja je polovište dužine određene nul-točkama ove funkcije $N_1(x_1, 0)$ i $N_2(x_2, 0)$, tj. $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Rješavanjem jednadžbe $P(x) = 0$, tj. $\frac{b}{a}(ax - x^2) = 0$ određuju se koordinate nul-točaka: $x_1 = 0, x_2 = a$, pa je koordinata točke polovišta: $x_M = \frac{a}{2}$. To znači da funkcija P maksimum postiže za $x_M = \frac{a}{2}$ i maksimalna površina iznosi $y_M = P(x_M) = P\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ab}{4} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$.

Drugim riječima, pravokutnik *CFTE* imat će maksimalnu površinu kada je udaljenost x jednaka polovici katete $\overline{BC}$, tj. $x = \frac{a}{2}$, a udaljenost y jednaka polovici katete $\overline{AC}$, tj. $y = \frac{b}{2}$.

Budući da su razmatrani pravokutni trokuti međusobno slični, može se zaključiti da će točka T koja se nalazi na polovici hipotenuze $\overline{AB}$ polaznog trokuta osigurati da pravokutnik *CFTE* ima maksimalnu površinu.

Konstrukcija: Neka su zadane dvije dužine duljina *a* i *b* (Slika 49.)



Slika 49. Konstrukcija sangaku figure 7

Pravokutni trokut ΔABC konstruira se prema *SKS* konstrukciji:

- na proizvoljni pravac *p* prenese se dužina duljine *b* počevši od točke *A*, $|AC| = b$
- kroz točku *C* konstruira se okomica *q* na pravac *p*
- na okomicu *q* prenese se dužina duljine *a* počevši od točke *C*, $|CB| = a$

  spajanjem vrhova *A* i *B* dobiva se ΔABC.

Konstrukcija proizvoljnog pravokutnika *CFTE*:

- na hipotenuzi $\overline{AB}$ odabere se proizvoljna točka *T*
- kroz točku *T* konstruiraju se okomice q_1 i q_2 na katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ s nožištima *F* i *E* redom

  okomice s katetama zatvaraju pravokutnik *CFTE.*

Konstrukcija pravokutnika *CFTE* maksimalne površine:

- konstruiraju se simetrale stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, a time i polovišta *F* i *E* redom
- simetrale se sijeku u polovištu hipotenuze *T* (središte trokutu opisane kružnice)

  simetrale s katetama zatvaraju pravokutnik *CFTE.*

5. Zaključak

Cilj ovoga rada bio je predstaviti jedinstveni kulturni fenomen poznat pod nazivom *sangaku*, kojeg karakteriziraju spoj kulture, povijesti, matematike i lingvistike. Po Makami i Smith, 1914., str. 279.:

> „*…matematika Japana bila je poput njezine umjetnosti,*
> *više izuzetna nego veličanstvena…*"

Na samom početku dan je povijesni prikaz Japana u vrijeme stvaranja sangaku ploča kroz opis karakteristika Edo razdoblja i života Japana u vrijeme samonametnute izolacije od ostatka svijeta kao i kroz poveznicu sangaku ploča i zavjetnih darova, koji su se prinosili šintoističkim svetištima i budističkim hramovima. Budući da je sangaku jedna vrsta umjetnosti kao i haiku poezija, istaknute su poveznice i ovih dviju vrsta umjetnosti i njihov značaj u Japanu, ali i ostatku svijeta, sve u svrhu približavanja konteksta i okolnosti unutar kojeg je nastao *sangaku*.

Središnja tema rada su odabrani geometrijski sangaku problemi, koji potječu iz različitih prefektura Japana. Svaki od sedam odabranih problema obrađen je strukturno slično kao na sangaku pločama: predstavljanje problema kroz odgovarajući umjetnički izričaj, mjesto i godinu izlaganja originalne ploče, opis problema te odnos koji je potrebno otkriti ili obrazložiti. Doprinos ovog rada je u detaljnom opisu rješavanja problema korištenjem elementarnih geometrijskih znanja te prikazu konstrukcije sangaku figura uz opis procesa konstruiranja po koracima.

Japanski profesor matematike Hidetoshi Fukagawa gotovo je sam razvio i popularizirao sangaku probleme nakon što su nestali iz fokusa razmatranja te ponovno uspostavio matematičku, povijesnu i kulturološku važnost sangakua u Japanu, unatoč mnogim preprekama. Danas se, prema Katsuhitou, sangaku smatra nacionalnim kulturnim dobrom, a zahvaljujući profesoru Hidetoshiju sangaku svojim matematičkim specifičnostima i umjetničkim izričajima ne nadahnjuje samo matematičare već i umjetnike. Sangaku tako ponovno postaje elegantna i lijepa tradicija koja je korisna i u današnjoj nastavi matematike, jer ima snagu pobuditi intelektualnu znatiželju učenika i omogućiti razvoj dubljeg zanimanja za matematiku.

Svatko tko se upusti u strpljivo i ustrajno istraživanje i rješavanje geometrijskih sangaku problema s vremenom razvija svoje vizualne sposobnosti i *geometrijsko oko*, usavršava i funkcionalno povezuje različita matematička znanja iako se u početku to možda čini nedostižnim.

Sažetak

U radu se predstavljaju *sangakui* – drvene ploče s matematičkim zapisima koje su postavljane diljem Japana pod krovišta hramova kao zavjetni darovi ili zahvale bogovima na matematičkim postignućima. Sangaku ploče nastale su u vrijeme Edo razdoblja kojeg karakterizira mir i samonametnuta izolacija Japana od ostatka svijeta. Tijekom Edo razdoblja dolazi do snažnog razvoja autohtone znanosti i umjetnosti, a taj period poznatiji je kao Genroku renesansa. Stoga, u svrhu boljeg razumijevanja nastanka i važnosti sangaku ploča prvo se u radu razmatraju povijesno-kulturni aspekti Japana toga vremena, a zatim se opisuju sadržaji sangaku ploča kako bi se moglo prijeći na središnju temu ovoga rada. U središnjem dijelu rada obrađuje se sedam odabranih *geometrijskih sangaku problema* sa ploča iz različitih prefektura poredanih prema zahtjevnosti i vrstama koncepata koji su u njima zastupljeni, a odabrani su tako da slijede geometrijski kurikulum elementarnog matematičkog obrazovanja. Problemi se obrađuju tako da prate strukturiranje i vizualno oblikovanje na pločama, a daje se i detaljan prikaz procesa rješavanja, što na originalnim pločama nije postojalo, vjerojatno zbog nedovoljno prostora ili zbog izazova čitateljima. Kako bi se došlo da rješenja problema, figure su konstruirane, zatim je konstrukcija provedena unutar programa dinamičke geometrije, a opis procesa konstruiranja u radu je opisan po koracima. Iako je za otkrivanje odnosa unutar odabranih sangaku problema potrebno suptilno razumijevanje geometrijskih koncepata i vještina rješavanja geometrijskih problema, oni se mogu prepoznati korištenjem samo elementarnih matematičkih znanja koja se stječu unutar osnovnoškolskog matematičkog obrazovanja pa ovaj rad može poslužiti kao koristan nastavni materijal svakom zainteresiranom učitelju matematike.

Ključne riječi: *sangaku ploča, sangaku problem, rješavanje problema, konstrukcija sangaku figure*

Abstract

This paper represents sangaku – wooden boards with mathematical writings that were placed under the roofs of temples all over Japan as votive gifts or thanks to the gods for mathematical achievements. Sangaku boards were created during the Edo period, which was characterized by peacetime and self-imposed isolation of Japan from the rest of the world. During the Edo period, there was a strong development of indigenous science and art, and that period was better known as the Genroku renaissance. Therefore, in order to understand better the origin and importance of sangaku boards, the paper first considers the historical and cultural aspects of Japan at that time, then describes the contents of sangaku boards in order to move on to the central topic of this paper which focuses on seven *selected geometric sangaku problems* which originate from different prefectures. In this paper, sangaku problems are ordered by complexity and concepts that are represented within them, which follow the geometrical curriculum of elementary mathematical education. The problems venerate the structure and visual design on original wooden boards, but unlike original boards, a detailed description of the solving process is given in this paper. Solutions probably weren't given on the original boards due to insufficient space or in order to challenge the readers. In order to find a solution to the problem, the figures were constructed, then the construction was made in the programme of dynamic geometry while the description itself follows the real process of construction step by step. Although subtle understanding of geometric concepts and geometric solving skills are required for solving sangaku problems, they can be solved using only elementary mathematical knowledge acquired within elementary school mathematics education, so this work can be useful teaching material for any interested mathematics teacher.

Key words: *sangaku board, sangaku problem, problem-solving, sangaku figure construction*

6. Literatura i izvori

Bai C. (2013). Sangaku. *How to draw those three circles with only a ruler and a compass?* https://math.stackexchange.com/questions/269951/sangaku-how-to-draw-those-three-circles-with-only-a-ruler-and-a-compass. Pristupljeno 15.6.2023.

Britannica. (2023). Haiku. https://www.britannica.com/art/haiku. Pristupljeno 1.7.2023.

Britannica. (2023). Matsuo Bashō. https://www.britannica.com/summary/Basho-Japanese-poet. Pristupljeno 18.6.2023.

Devide, V. (2010). *Čudesna matematika: pogled iznutra i izvana*. Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo

Fameli R. (2020). Math 400: Sangaku, Japanese temple geometry. Dostupno na: https://cklixx.people.wm.edu/teaching/math400/Fameli.pdf Pristupljeno 2.6.2023.

Fukagawa, H. & A. Rothman, A. (2008). *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*. Princeton University Press: New Jersey.

HistoryASM. (2011) Dejima: japan's only connection to the outside world. http://historyasm.blogspot.com/2011/06/dejima-deep-space-nine-of-feudal-japan.html. Pristupljeno 28.6.2023.

Jackowski T. (2023) Haiku poezija – Bashō. Takase Studios, LLC https://www.takase.com/shop/japanese-scrolls-kakemono/haiku/basho-summer-grass-all-the-warriors-are-but-the-remains-of-dreams-natsukusa-ya-tsuwamono-domo-ga-yume-no-ato/. Pristupljeno 1.7.2023.

https://www.takase.com/shop/japanese-scrolls-kakemono/haiku/basho-as-the-temple-bell-fades-the-ringing-lingers-in-the-blossom-scent-evening-kane-kiete-hana-no-ka-wa-tsuku-yuube-kana/. Pristupljeno 1.7.2023.

Kabić, M. (2012). Sangaku problemi – geometrijski problemi u japanskim hramovima - 1. dio. *Matematika i škola*, 13, 64; 160-167.

Katsuhito S. (2017). *Sangaku: Sacred mathematics in Japan*. University of California, Santa Cruz. Dostupno na: https://escholarship.org/content/qt7d97v5bj/qt7d97v5bj_noSplash_5d12fbfeaf4ddac1c6a753138a62bc2a.pdf. Pristupljeno 7.7.2023.

Makishita H. (2011). Solving Problems from Sangaku with Technology. University of Tsukuba, Japan. Dostupno na: https://atcm.mathandtech.org/ep2010/regular/3052010_18601.pdf Pristupljeno 5.7.2023.

Rothman T, Fukagawa H. (1998). Japanese temple geometry. *Scientific American*. Vol 278. No 5, pp. 84-91

Smith D. E. & Mikami Y. (1914). *A History of Japanese Mathematics*, Dover.

Vincent J. & Vincent C. (2004). Japanese temple geometry. University of Melbourne. Dostupno na: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ720042.pdf Pristupljeno 12.7.2023.

7. Popis ilustracija

Prilozi

Obrazac A.Č.

SVEUČILIŠTE U SPLITU

FILOZOFSKI FAKULTET

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

kojom ja ___Ana Cicvarić___, kao pristupnik/pristupnica za stjecanje zvanja __magistrice primarnoga obrazovanja s pojačanim modulom ranoga učenja engleskoga jezika, izjavljujem da je ovaj završni/diplomski rad rezultat isključivo mojega rada, da se temelji na mojim istraživanjima i oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i literatura. Izjavljujem da ni jedan dio završnoga/diplomskoga rada nije napisan na nedopušten način, odnosno da nije prepisan iz necitiranoga rada, stoga ne krši ničija autorska prava. Također izjavljujem da nijedan dio ovoga završnoga/diplomskoga rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Split, 21. rujna 2023.

Potpis

OBRAZAC I.P.

IZJAVA O POHRANI ZAVRŠNOG/DIPLOMSKOGA RADA U DIGITALNI REPOZITORIJ FILOZOFSKOGA FAKULTETA U SPLITU

Student/ica:	Ana Cicvarić
Naslov rada:	Geometrijski sangaku problemi
Znanstveno područje:	Matematika
Znanstveno polje:	Obrazovne znanosti
Vrsta rada:	Diplomski rad

Mentor/Mentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): dr. sc. Nives Baranović, v. pred.

Komentor/Komentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): /

Članovi Povjerenstva (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime):

1. doc. dr. sc. Lada Maleš, predsjednica
2. dr. sc. Nives Baranović, v. pred., član
3. Željka Zorić, v. pred., član

Ovom izjavom potvrđujem da sam autor/autorica predanoga završnoga/diplomskoga rada (zaokružite odgovarajuće) i da sadržaj njegove elektroničke inačice potpuno odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada. Slažem se da taj rad, koji će biti trajno pohranjen u Digitalnom repozitoriju Filozofskoga fakulteta Sveučilišta u Splitu i javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama *Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju*, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15, 131/17), bude:

a) u otvorenom pristupu

b) dostupan studentima i djelatnicima FFST-a

c) dostupan široj javnosti, ali nakon proteka 6 mjeseci / 12 mjeseci / 24 mjeseca (zaokružite odgovarajući broj mjeseci).

(zaokružite odgovarajuće)

U slučaju potrebe (dodatnoga) ograničavanja pristupa Vašemu ocjenskom radu, podnosi se obrazloženi zahtjev nadležnomu tijelu u ustanovi.

Split, 21. rujna 2023.

Ana Cicvarić

Mjesto, nadnevak

Potpis studenta/ice