DUDENEYJEV HABERDASHEROV PROBLEM

Grubić, Milka

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Humanities and Social Sciences, University of Split / Sveučilište u Splitu, Filozofski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:172:212891

SVEUČILIŠTE U SPLITU

FILOZOFSKI FAKULTET

DIPLOMSKI RAD

DUDENEYJEV HABERDASHEROV PROBLEM

MILKA GRUBIĆ

Split, 2022.

Odsjek: Učiteljski studij
Studij: Integrirani preddiplomski i diplomski učiteljski studij

DUDENEYJEV HABERDASHEROV PROBLEM

Studentica:
Milka Grubić

Mentorica:
dr. sc. Nives Baranović, v. pred.

Split, studeni 2022.

Sadržaj

1. Uvod

Dobra bi zagonetka trebala zahtijevati vježbanje našeg uma i domišljatosti i premda su matematičko znanje i logičko zaključivanje često pomoć pri rješavanju istih, ponekad se dogodi da su naše prirodno lukavstvo i dosjetljivost ipak od značajnije vrijednosti. ~ Henry Ernest Dudeney (O'Connor i Robertson, 2003b)

Ponudivši svojim čitateljima nebrojene matematičke i logičke zagonetke i mozgalice kojima je zainteresirao i zaokupirao pozornost pripadnika svih generacija, vrsni je engleski matematičar i autor brojnih matematičkih knjiga za razonodu, Henry Ernest Dudeney, posvetio čitav svoj život matematici, svojoj velikoj strasti i ljubavi.

Premda je Dudeney napisao i objavio izniman broj svojih matematičkih i logičkih zagonetki, mozgalica i igara, ipak je samo jedna od njih svih ovih godina bila i ostala tema mnogih rasprava i nebrojenih pokušaja u otkrivanju njezina rješenja. *The Haberdasher's Puzzle* naziv je koji krasi tu iznimno intrigantnu geometrijsku mozgalicu koja je svojom pojavom uzburkala rad moždanih vijuga brojnih svjetskih matematičara i strastvenih rješavača matematičkih i logičkih zagonetki.

U svom tom zanimanju za ovaj problem, neki su zaljubljenici u geometrijske i općenito matematičke zagonetke ponudili svoja rješenja, mnogi su ga obradili u svojim zbirkama matematičkih i logičkih zagonetki ili pak razradili njegovu problematiku u knjigama matematičkoga sadržaja, a neki za njega još uvijek pokazuju zanimanje i obrađuju ga suvremenim računalnim alatima, o njemu pišu na forumima, u seminarima i samim time potiču na razmišljanje i raspravu o njemu.

U radu je riječ upravo o ovom nadasve zanimljivom i inspirativnom problemu koji samom svojom pojavom zainteresira i potiče na istraživanje. Na početku se objašnjava njegovo porijeklo, smješta ga se na vremensku crtu i obrađuje njegova problematika nakon čega se razrađuje njegova geometrijska konstrukcija uz detaljno izveden matematički dokaz. U radu se otvaraju još neka pitanja i razmatra opravdanost navedenog. Navedeni su i razlozi i načini primjene ovakvih i sličnih geometrijskih problema korisnih i prikladnih za korištenje na svim razinama obrazovne vertikale.

Na posljetku, kao istraživački dio iznosi se analiza triju zadataka koji se zasnivaju na opisanome Dudeneyjevom *Haberdasherovom* problemu. Dva su zadatka služila za ispitivanje znanja i vještina matematičkog dokazivanja te opisivanja konstruiranja danog problema studenata

Preddiplomskog sveučilišnog studija Matematika Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu. Treći je zadatak korišten za ispitivanje vizualno-prostornih sposobnosti studenata različitih studijskih grupa *Filozofskog fakulteta u Splitu* i to studenata *Integriranog preddiplomskog i diplomskog Učiteljskog studija* i studenata s *Odsjeka za Povijest, Povijest umjetnosti, Filozofiju, Pedagogiju, Engleski jezik, Hrvatski jezik* i *Talijanski jezik*.

Dakle, svrha rada je da se još jednom otvori, razradi i potakne zanimanje za jedan iznimno vrijedan geometrijski problem kako bi se mogao primijeniti u učenju i poučavanju matematike na svim razinama obrazovanja.

2. Povijesni razvoj Dudeneyjeva *Haberdasherova* problema

U ovome dijelu ističu se zaslužni matematičari i opisuju različite faze koje su bile ključne u nastanku i razvoju problema koji se razlaže u ovom radu.

2.1. Henry Ernest Dudeney

Henry Ernest Dudeney engleski je matematičar i autor prepoznat kao jedan od najvećih i najistaknutijih autora niza matematičkih i logičkih zagonetki i igara, a „po mnogima i najveće ime zabavne ili rekreacijske matematike" (Dakić, 2018, str. 78). Rođen je 10. travnja 1857. u Mayfieldu (istočni Sussex, Engleska) u obitelji s dugom matematičkom tradicijom. Još kao dječak naučio je igrati šah što ga je od rane dobi potaklo na logičko promišljanje i zanimanje za šahovske probleme, matematiku, a ponajviše za matematičke i logičke igre i zagonetke. Već od devete godine aktivno je sastavljao razne probleme i zagonetke i objavljivao ih u lokalnim časopisima. Svo je svoje slobodno vrijeme posvetio proučavanju matematike i njezine povijesti bez obzira na to što nikada nije pohađao više formalno obrazovanje na fakultetu. Čitajući i proučavajući o povijesti matematike shvatio je da je njezin razvoj usko povezan s rješavanjem zagonetki. U predgovorima nekih od svojih knjiga iznosi i misao da „čovjek život provede rješavajući zagonetke, jer zagonetke su zbunjujuća pitanja, a život provodimo neprestano postavljajući pitanja i tražeći odgovore na njih" (O'Connor i Robertson, 2003a). Pisao je članke za mnoge časopise i novine u kojima su objavljene njegove brojne matematičke zagonetke, neko vrijeme pod pseudonimom *Sfinga*, a kasnije i pod punim imenom.

Zbirke Dudeneyjevih zagonetki: *The Canterbury Puzzles* (1907), *Amusements in Mathematics* (1917), *The World's Best Word Puzzles* (1925), *Modern Puzzles* (1926) objavljivane su još za njegova života, a dvije, *Puzzles and Curious Problems* (1931) i *A Puzzle-Mine* (1944), posthumno (O'Connor i Robertson, 2003a).

The Haberdasher's Puzzle, istaknuta kao najpoznatija među brojnim Dudeneyjevim zagonetkama, geometrijski je problem popularan još i danas. Prvi ju put objavljuje 1902. godine u časopisu *The Weekly Dispatch*, a 1907. uvrštava ju i u *The Canterbury Puzzles* zbirku kao dvadeset i šesti problem (Pérez Arribas, 2012).

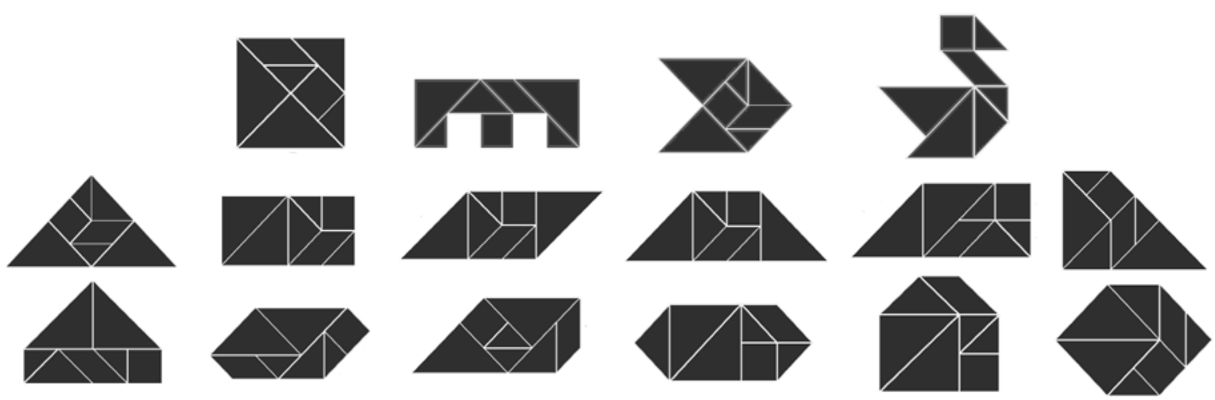
Doživjevši sedamdeset i treću godinu života, Henry Ernest Dudeney umire 24. travnja 1930. u svome domu u Lewesu u Engleskoj (Times Obituary, 1930).

2.2. Geometrijska disekcija

Greg N. Frederickson jedan je od autora koji se u svojim djelima bave problemima geometrijskih disekcija. Prema Fredericksonu (2002), pod geometrijskom disekcijom podrazumijeva se dijeljenje geometrijskog lika na konačan broj dijelova koji se nakon dijeljenja mogu reorganizirati u neki drugi geometrijski lik.

Matematički gledano, problemi geometrijskih disekcija dijele se u dvije skupine. Prva se odnosi na dijeljenje geometrijskog lika na dijelove od kojih će se moći preoblikovati veći broj drugih geometrijskih likova, dok se druga odnosi na traženje jednakog rastava dvaju različitih geometrijskih likova, odnosno na dijeljenje jednog geometrijskog lika na određen broj dijelova čijim će se preslagivanjem moći oblikovati drugi traženi geometrijski lik.

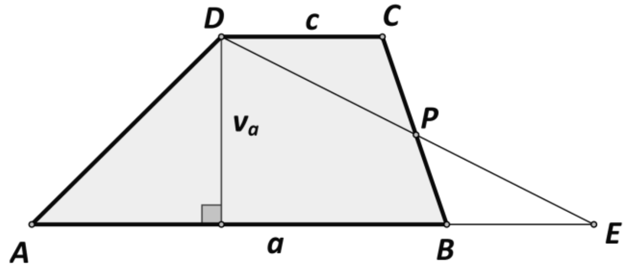
Primjer geometrijske disekcije koji pripada prvoj navedenoj skupini slagalica je *tangram* popularna već više od dvjesto godina tijekom kojih ju se koristi u različite svrhe. Ova je popularna slagalica nastala dijeljenjem kvadrata na sedam dijelova od kojih se potom može oblikovati još dvanaest različitih konveksnih likova (Slika 1) i na tisuće raznih drugih oblika (Kavajin, Baranović, 2019).



Slika 1. *Tangram* likovi (Grubić, Baranović, 2021).

Kada se govori o drugoj navedenoj skupini geometrijskih disekcija, reći ćemo da su dva lika ekvivalentna po disekciji onda kada su jednako rastavljiva, a prema Bolyai i Gerwien, dva su lika ekvivalentna po disekciji ako i samo ako su jednakih površina (Hartshorne, 2000).

Primjeri se ovakvih disekcija koriste u nastavi geometrije i to najčešće pri određivanju površine jednog lika poznavanjem površine drugog lika ili kod rješavanja problema primjenom metode površine. Primjerice, svaki se trapez može presložiti u trokut pa se formula za površinu trapeza može izvesti preko formule za površinu trokuta (Slika 2).



Slika 2. Reorganiziranje trapeza u trokut

S obzirom na to da su trokuti ΔBEP i ΔCDP sa slike sukladni po poučku KSK, pri čemu je P polovište stranice $\overline{BC}$, trapez $ABCD$ i trokut ΔAED jednakih su površina pa vrijedi:

$$P_{ABCD} = P_{ABPD} + P_{\Delta CDP} = P_{ABPD} + P_{\Delta BEP} = P_{\Delta AED} = \frac{(a+c)\cdot v}{2}.$$

Osim takvih u nastavi često korištenih primjera iz druge skupine spomenutih disekcija, postoje i složeniji primjeri među kojima se posebno ističe jedan. Riječ je o disekciji jednakostraničnog trokuta na četiri dijela čijim se preslagivanjem može oblikovati kvadrat. Ovaj problem poznat je pod nazivom The *Haberdasher's Puzzle*, a upravo je o njemu riječ u nastavku rada.

Naime, Platon, Pitagora i Arhimed u antičkoj Grčkoj, arapski matematičari desetoga stoljeća, kineski matematičari osamnaestoga stoljeća, a ponajviše Amerikanac Sam Loyd i Britanac Henry Ernest Dudeney krajem devetnaestog i početkom dvadesetog stoljeća, zaslužni su za popularizaciju geometrijskih disekcijskih slagalica izazivajući pozornost mnogih vrsnih matematičara i matematičkih rekreativaca. Kreiranjem vlastitih jedinstvenih rješenja postavljenih geometrijskih problema ostavili su svoj trag, kako u geometriji općenito, tako i u zabavnoj ili rekreacijskoj matematici (Wikipedia: *Hinged dissection*).

William Wallace, Farkas Bolyai i Paul Gerwien tvorci su teorema o disekciji mnogokuta. Wallace-Bolyai-Gerwienov teorem iz 1807. iznosi da se izrezivanjem mnogokuta na konačan broj dijelova i njihovom translacijom i rotacijom, odnosno pravilnim rekomponiranjem može dobiti drugi mnogokut i to ako i samo ako oba mnogokuta imaju jednaku površinu. Kraće, prema ovom teoremu bilo koja dva mnogokuta jednake površine moraju imati zajedničku disekciju.

Najpoznatiji primjer takve disekcije Dudeneyjev je *The Haberdasher's Puzzle* problem koji ujedno donosi i jedinstvenu disekciju na do sada jedini poznati najmanji broj dijelova ove geometrijske slagalice. Dudeneyjevo je rješenje jedinstveno i po tome što je uz njega ponudio i ilustraciju dvosmjerno rasklopnog modela čime je popularizirao i koncept zglobno rasklopne disekcije mnogokuta poznat kao *hinged dissection*. Ovime je sve do ne tako davne 2007. godine bilo otvoreno pitanje postoji li uvijek i dvosmjerna zglobno rasklopna disekcija dvaju mnogokuta jednakih površina s postojećom zajedničkom disekcijom. Erik Demaine sa svojim je suradnicima dokazao da u svakome slučaju ovakve disekcije uvijek mora postojati i dvosmjerna zglobno rasklopna disekcija te je ponudio i razrađen algoritam njihove konstrukcije (Wikipedia: *Hinged dissection*).

2.3. Nastanak i razvoj Dudeneyjeva *Haberdasherova* problema

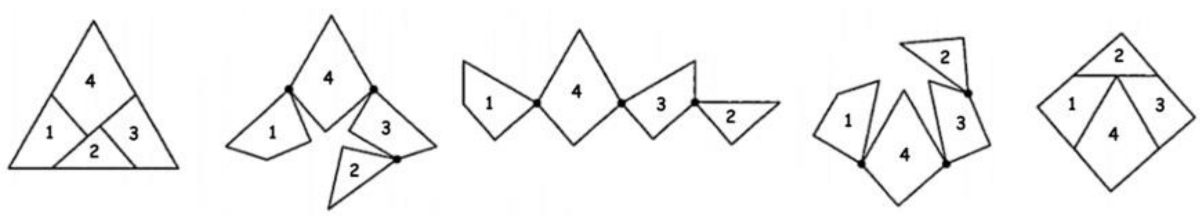
Hinged Dissections: Swinging and Twisting djelo je u kojemu autor Greg N. Frederickson (2002) piše o svome zanimanju i istraživanju novih disekcijskih tehnika koje će omogućiti razumijevanje i izradu dvosmjerno rasklopnih disekcijskih geometrijskih likova. Na samome početku prvoga poglavlja Frederickson geometrijsku disekciju definira kao „rezanje geometrijskog lika na dijelove koji se mogu reorganizirati u neki drugi geometrijski lik." Čitatelja upoznaje i s činjenicom o dalekoj i iznenađujuće bogatoj povijesti geometrijske disekcije u matematici, od starogrčkih matematičara Platonova i Pitagorina vremena do ne tako davnih vremena u kojima je popularizirana kroz zabavnu ili rekreacijsku matematiku u kolumnama novina i časopisa za koje su ih pisala dva istaknuta autora, Amerikanac Sam Loyd i Britanac Henry Ernest Dudeney.

Posebnost Loydova i Dudeneyjeva rada jest ta da su obojica u pisanju svojih disekcijskih slagalica za cilj postavila pronaći rješenje s najmanjim brojem dijelova geometrijske slagalice. Svojim su čitateljima postavljali brojne matematičke zagonetke s nerijetko vrlo izazovnim problemima. Jednu je takvu geometrijsku slagalicu, prvo u *The Weekly Dispatch* časopisu 1902. godine pa u *Daily Mail* časopisu 1905. (izdanja od 1. i 8. veljače), a kasnije i u svojoj zbirci *The Canterbury Puzzles* po prvi puta objavljenoj 1907. godine, predstavio upravo Henry E. Dudeney. Cilj je njegove *The Haberdasher's Puzzle* geometrijske slagalice podijeliti jednakostraničan trokut na najmanji broj dijelova koji se potom mogu presložiti u kvadrat, a da se pritom dijelovi slagalice ne preokreću.

Dudeneyjev *The Haberdasher's Puzzle* problem još od 1902. neprestano okupira pozornost i interes brojnih matematičara i matematičkih rekreativaca, slagalica je to za koju je do dan danas uz njezina tvorca još samo jedna osoba ponudila ispravno rješenje s najmanjim brojem dijelova (Frederickson, 2002, str. 1, 131-133).

Nakon što među brojnim rješenjima koja su mu pristizala i godinu dana nakon prve objave slagalice nije bilo rješenja s brojem dijelova manjim od pet, Dudeney je navodno sam ponudio četverodijelno rješenje disekcije jednakostraničnog trokuta u kvadrat. Kasnije, u svojoj knjizi *The Canterbury Puzzles* Dudeney pridaje zasluge i gospodinu Charlesu W. McElroyju kao osobi koja je među stotinama pristiglih rješenja jedina ponudila točno rješenje *The Haberdasher's Puzzle* problema (Dudeney, 1919).

Osim rješenja popraćenog opisom geometrijske konstrukcije, Dudeney je 1905. godine pred Kraljevskim društvom predstavio i zglobno rasklopni model (Slika 3) izrađen od mahagonija ponudivši uz njega i ilustraciju dvosmjerno rasklopnog modela. Model je zamišljen tako da su mu dijelovi međusobno povezani rasklopnim vijcima postavljenima na točno određenim vrhovima svakog od dijelova slagalice. Time je i dodatno potaknuo interes prema geometrijskim disekcijama i izradi odgovarajućih rasklopnih disekcijskih modela o kojima će detaljnije biti u sljedećem poglavlju rada.

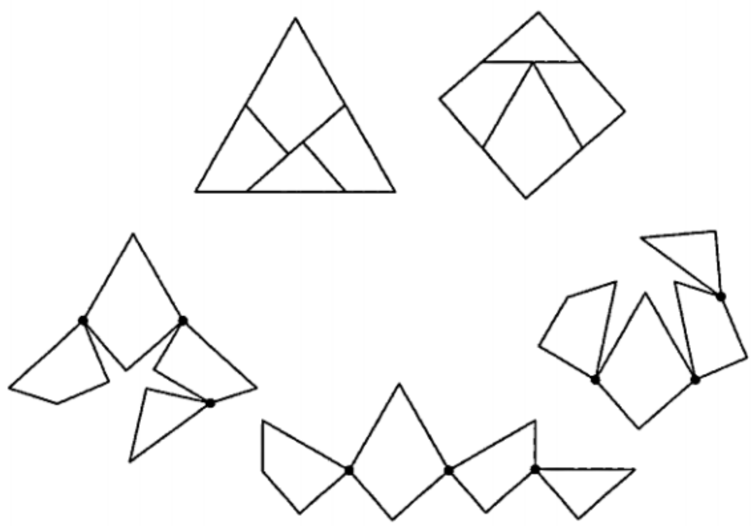


Slika 3. Dudeneyjev zglobno rasklopni model *Haberdasherove* slagalice

2.4. Zglobna disekcija

Nadovezujući se na prethodno poglavlje ovoga rada i imajući na umu popularnost geometrijske disekcije još od Platona, Pitagore i Arhimeda u antičkoj Grčkoj, arapskih matematičara desetoga stoljeća, kineskih matematičara osamnaestoga stoljeća, a ponajviše Sama Loyda i Henryja Ernesta Dudeney krajem devetnaestog i početkom dvadesetog stoljeća koji su svi redom zaslužni za popularizaciju geometrijskih disekcijskih slagalica izazivajući pozornost mnogih vrsnih matematičara i matematičkih rekreativaca, prelazimo u još jednu, složeniju dimenziju disekcije. Kreiranjem vlastitih jedinstvenih rješenja postavljenih geometrijskih problema svi su ovi matematičari ostavili svoj trag, kako u geometriji općenito, tako i u zabavnoj ili rekreacijskoj matematici, ali Henry Ernest Dudeney bio je taj koji je godine 1905. pozvan pred Kraljevsko društvo predstaviti svoj zglobno preklopni model izrađen od mahagonija čime je zainteresirao mnoge za istraživanje istih i potaknuo interes za izradu preklopnih modela geometrijskih disekcija.

Model koji je Dudeney tada predstavio bio je njegov rasklopni model disekcije jednakostraničnog trokuta u kvadrat. Okrećući dijelove njegova modela u jednome smjeru dobiva se kvadrat, dok u drugome smjeru oni tvore jednakostranični trokut. Od zglobova koji povezuju sva četiri dijela modela, dva su postavljena na polovištima dviju stranica trokuta, dok treći zglob zajedno s vrhovima dijelova koji se susreću na trećoj stranici trokuta (Slika 4) istu dijele u omjeru približnih vrijednosti iracionalnih brojeva 0,982 : 2 : 1,018 (Wells, 1991, str. 61-62).



Slika 4. Dudeneyjeva rasklopna disekcija jednakostraničnog trokuta u kvadrat (Frederickson, 2002, str. 1)

Nakon predstavljanja svog izvanrednog četverodijelnog rješenja disekcije jednakostraničnog trokuta u kvadrat, Dudeney je napisao da svome radu „dodaje i ilustraciju koja prikazuje zagonetku u poprilično zanimljivom praktičnom obliku izrađenu od uglancanog mahagonija s mjedenim zglobovima. Njezina četiri dijela tako tvore lanac koji zatvaranjem u jednom smjeru tvori jednakostraničan trokut, a u drugome kvadrat." (Frederickson, 2002, str. 1)

Ovaj je Dudeneyjev model od samog njegova predstavljanja opčinio mnoge, toliko je zadivljujući da je od tada opisivan u brojnim matematičkim knjigama. Tako je već spomenuti profesor Greg N. Frederickson (2002) jedan od onih koji su ga uvrstili u svoja djela. On ga u svoju impresivnu zbirku rasklopnih disekcija, *Hinged dissections: Swinging and Twisting*, uvrštava kao prvog u nizu čime mu pridaje i iznimnu važnost.

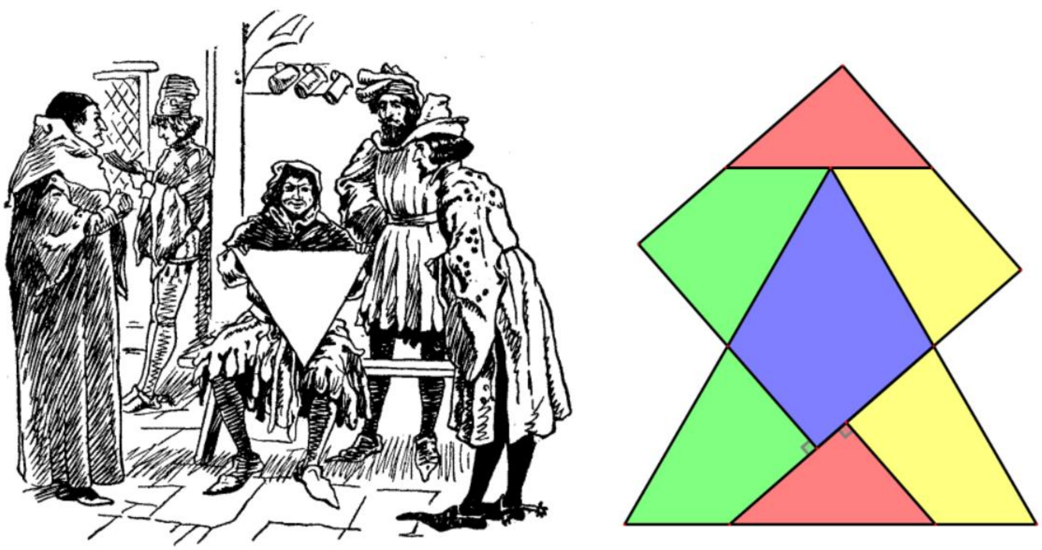
Predstavljajući Dudeneyjev model disekcije, Frederickson čitatelju iznosi brojne detaljne informacije o njemu. Tako u razradu ove teme uključuje i Dudeneyjev opis lociranja disekcijskih rezova pomoću ravnala i šestara. Prema Fredericksonu (2002, str. 10), Dudeney navodi da „ključ rješenja leži u činjenici da postoje tri kuta trokuta i to od 60 stupnjeva kojih se treba riješiti kako bi se dobila četiri prava kuta kvadrata. Tri kuta od 60 stupnjeva spojena tvore jedan kut od 180 stupnjeva pa ako su rezovi napravljeni tako da se ova tri kuta sastanu u jednoj točki, oni će tvorit ravnu liniju što je vidljivo i u prikazu rješenja.“ (Slika 4)

Kako Dudeney nije uvijek imao rješenje za svaki svoj postavljeni zagonetni problem, tako se postavlja pitanje je li već pri prvome predstavljanju problema znao za postojanje četverodijelnog rješenja ili ga je pak saznao tek nakon što je primio pismo s rješenjem gospodina Charlesa McElroyja kojemu kasnije pridaje zasluge kao jedinom čitatelju koji je poslao točno rješenje. Kako god da je bilo, rješenje je predstavljeno i za sada još uvijek jedino je poznato kao rješenje presijecanja jednakostraničnog trokuta na četiri dijela čijim se preslagivanjem dobiva kvadrat. Predstavljeno je kao geometrijska disekcija, ali i kao model zglobno rasklopne disekcije čije je predstavljanje uvelike utjecalo na razvoj interesa za iste (Frederickson, 2002).

2.5. Rezime Dudeneyjeva *Haberdasherova* problema

„Koristeći se s tri reza podijelite jednakostraničan trokut na četiri dijela čijim ćete preslagivanjem dobiti kvadrat ne preokrećući dijelove slagalice na drugu stranu.“ Ovako bi glasio Dudeneyjev problem kada bi ga se iz izvorne zagonetke preoblikovalo u jasno postavljen tekstualni zadatak. Odakle mu ime The *Haberdasher's Puzzle* i zašto ga je autor baš tako nazvao pronalazimo na četrdeset i devetoj i pedesetoj stranici Dudeneyjeve prve zbirke matematičkih i logičkih zagonetki, *The Canterbury Puzzles* (1919) (Slika 5).

Kao dvadeset i šesti problem navedene zbirke, zagonetka govori o *Haberdasheru* to jest galanteristu koji izaziva društvo postavljajući im problem rezanja materijala oblika savršenog jednakostraničnog trokuta na četiri dijela koja će potom ne preokrećući ih moći presložiti u kvadrat. Ne znajući rješenje postavljenog problema, *Haberdasher* se želi našaliti s društvom provjeravajući njihovu stručnost i vještinu rezanja tkanine. Priča se nastavlja tako što nitko od prisutnih nije pronašao četverodijelno rješenje, već su oni najpametniji i najstručniji članovi društva uspjeli riješiti zadatak s pet dijelova slagalice. Kako ne bi poljuljao vjeru čitatelja u mogućnost pronalaska točnoga rješenja, Dudeney na samome kraju zagonetke iznosi da četverodijelno rješenje zaista postoji i da ga je on sam uspio pronaći ne preokrećući ijedan dio slagalice (Dudeney, 1919).



Slika 5. Izvorna ilustracija *The Haberdasher's Puzzle* problema (lijevo)
i rekonstrukcija Dudeneyjeva rješenja (desno)

Kako je i prije spomenuto, nakon prvotno objavljene zagonetke 1902. u *The Weekly Dispatch* časopisu i njezina ponovnog objavljivanja u *Daily Mail* časopisu 1905., Dudeneyju je pristiglo na stotine netočnih rješenja među kojima je bilo i jedno točno, rješenje gospodina Charles W. McElroyja. Dudeney je sam ponudio rješenje 1903. godine, a zasluge gospodinu McElroyju pridaje 1907. godine u objavljenom rješenju *The Canterbury Puzzles* zbirke kao jedinomu čitatelju koji je ponudio točno rješenje (Dudeney, 1919).

3. Matematičke karakteristike Dudeneyjeva *Haberdasherova* problema

U ovom dijelu raspravlja se o različitim aspektima rješavanja Dudeneyjeva *Haberdasherova* problema: konstruktivno određivanje podjele trokuta u svrhu oblikovanja kvadrata, provjera valjanosti konstrukcije kroz deduktivno zaključivanje, razmatranje bliske aproksimacije točnog rješenja te ispitivanje njezine valjanosti i konačno razmatranje klase pravokutnika u svrhu određivanja odgovarajućih omjera podjele stranice polaznog trokuta.

3.1. Dudeneyjevo rješenje *Haberdasherova* problema

Pri stvaranju zagonetki Dudeney je uvijek bio vođen mislima: „Dobra zagonetka, poput vrline, sama je sebi nagrada. Kada čovjek uspije riješiti zagonetku, i sam osjećaj zadovoljstva dovoljna je nagrada za njegov trud. On voli biti suočen s misterijom i nije u potpunosti sretan dok ga ne riješi.“ (Dudeney, 1919, str. 12-13). Nakon serije u časopisima objavljenih zagonetki Dudeney je nakon izvjesnog vremena u drugome dijelu *The Canterbury Puzzles* zbirke priložio i njihova rješenja među kojima se našlo i rješenje *The Haberdasher's Puzzle* problema.

Dudenyjevo je rješenje možda još uvijek jedino poznato rješenje kojim se jednakostraničan trokut s tri reza može podijeliti na četiri dijela koja se bez preokretanja mogu presložiti u kvadrat. Za sada ćemo se upoznati s Dudeneyjevim rješenjem i pokazati njegovu valjanost, a o pitanju postojanja nekog drugog, možda jednostavnijeg rješenja, pozabavit ćemo se u sljedećem poglavlju ovoga rada.

Koraci konstrukcije prema Dudeneyju (1919, str. 179-180), uz doradu i vizualni prikaz prema Grubić i Baranović, 2021:

1) U danom jednakostraničnom trokutu ΔABC neka je točka D polovište dužine $\overline{AC}$, a točka E polovište dužine $\overline{BC}$.
2) Dužina $\overline{AE}$ produlji se do točke F tako da vrijedi $|EF| = |EC|$.
3) Neka je G polovište dužine $\overline{AF}$. Opiše se kružnica k_1 sa središtem G radijusa $|GA|$; $k_1(G, |GA|)$.
4) Stranica traženog kvadrata je duljine $|EH|$ gdje je H sjecište pravca EC s kružnicom k_1.
5) Iz točke E opiše se kružnica k_2 radijusa $|EH|$; $k_2(E, |EH|)$. Neka je sjecište kružnice k_2 s dužinom $\overline{AB}$ točka J.
6) Na dužini $\overline{AB}$ odabere se točka K tako da vrijedi $|JK| = |EC|$.

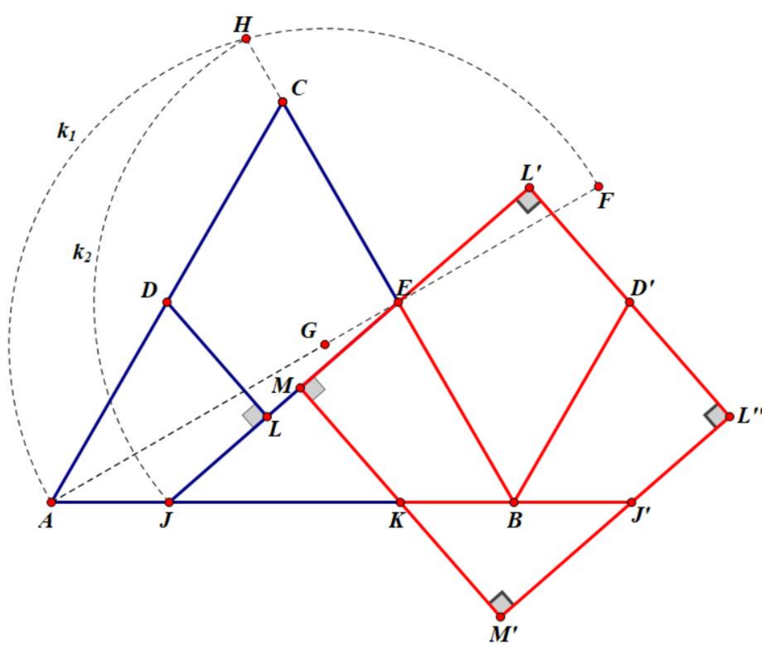
7) Još se iz točaka D i K spuste okomice na dužinu $\overline{JE}$. Neka su nožišta okomica točke L i M redom.

Kada se dužinama $\overline{JE}$, $\overline{DL}$ i $\overline{MK}$ jednakostranični trokut ΔABC podijeli na četiri dijela, na opisani način, tada se preslagivanjem može oblikovati kvadrat *MM'L''L'* (Slika 6).

Dokaz valjanosti konstrukcije i preslagivanja trokuta u kvadrat u kratkim crtama prikazan je u radu *Dudeneyjev Haberdasherov problem* (Grubić, Baranović, 2021), a u nastavku se detaljnije razlaže.

3.2. Provjera valjanosti Dudeneyjeva rješenja

Uzimajući u obzir međusobnu sličnost svih jednakostraničnih trokuta, radi jednostavnosti i provjere valjanosti Dudeneyjeve konstrukcije, bez smanjenja općenitosti, za duljinu stranice jednakostraničnog trokuta ΔABC može se uzeti duljinu $a = 2\,cm$. Tada je visina trokuta ΔABC duljine $v_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,cm$, a njegova površina je $P_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\,cm^2$. Slijedi da je i površina kvadrata $P_{MM'L''L'} = \sqrt{3}cm^2$ jer su trokut i kvadrat sastavljeni od jednakih dijelova pa je njegova stranica duljine $\sqrt{\sqrt{3}}\,cm$, odnosno $\sqrt[4]{3}\,cm$.



Slika 6. Konstrukcija Dudeneyjeva rješenja (Grubić i Baranović, 2021, str. 78)

Pokaže se da je Dudeneyjeva konstrukcija zaista valjana, odnosno da kada je stranica jednakostraničnog trokuta duljine $a = 2cm$, onda je četverokut dobiven na opisan način kvadrat stranice duljine $\sqrt[4]{3}\,cm$. Kako bi se utvrdilo je li promatrani četverokut kvadrat, potrebno je provjeriti jesu li sve njegove stranice jednakih duljina, a svi unutrašnji kutovi pravi.

U skladu s opisanom konstrukcijom, utvrđuje se da su kutovi četverokuta *MM'L''L'* pravi jer vrijedi sljedeće:

1) kut pri vrhu *M* je pravi prema konstrukciji
2) kut pri vrhu *M'* je pravi jer je nastao rotacijom kuta pri vrhu M
3) kut pri vrhu *L''* je pravi jer je nastao translacijom kuta pri vrhu *L*, koji je pravi po konstrukciji
4) kut pri vrhu *L'* je pravi jer je nastao rotacijom kuta pri vrhu *L*.

Iz navedenog se zaključuje da je četverokut *MM'L''L'* pravokutnik pa su nasuprotne stranice jednakih duljina, to jest: $|MM'| = |L'L''|$ i $|ML'| = |M'L''|$.

Kako je točka *E* polovište stranice $\overline{BC}$ slijedi da je $|EC| = |EB| = 1cm$. Dužina $\overline{AE}$ produlji se do točke *F* tako da vrijedi $|EF| = |EC| = |EB| = 1cm$. Slijedi da je radijus $|AG|$ kružnice $k_1(G, |AG|)$ duljine $\frac{\sqrt{3}+1}{2}cm$ jer vrijedi:

$$|AG| = \frac{|AF|}{2} = \frac{|AE| + |EF|}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}cm .$$

Točka *H* nastala je kao sjecište pravca *EC* i kružnice $k_1(G, |AG|)$ pa je $|GH| = |AG| = \frac{\sqrt{3}+1}{2}cm$ te je $|EG| = |AE| - |AG| = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}cm$. Sada se duljina stranice kvadrata $|EH|$ može odrediti primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ΔGEH pa vrijedi:

$$|EH|^2 = |GH|^2 - |GE|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$$

$$|EH| = \sqrt[4]{3}\,cm$$

Dakle, duljina stranice kvadrata jednaka je $|EH| = \sqrt[4]{3}\,cm$ što je upravo jednako duljini stranice kvadrata kojeg želimo konstruirati. Ostaje nam provjeriti odgovara li ista duljina i za stranice $\overline{MM'}$ i $\overline{ML'}$.

Kružnica k_2 sa središtem u točki E promjera $|EH|$, $k_2(E, |EH|)$, siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki J iz čega slijedi $|EJ| = |EH| = \sqrt[4]{3}$. Za kut $\alpha = |\angle BJE|$ trokuta ΔJBE prema poučku o sinusima vrijedi:

$$\frac{|EB|}{\sin\alpha} = \frac{|EJ|}{\sin 60°} \text{ iz čega slijedi da je } \sin\alpha = \frac{\sin 60° \cdot |EB|}{|EJ|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}.$$

Konstrukcijom točke K na dužinu $\overline{AB}$ dobiva se da je $|JK| = |EC| = 1cm$, a $\overline{KM}$ je okomica na $\overline{EJ}$. Primjenom definicije za sinus šiljastog kuta na pravokutni trokut ΔJKM dobiva se: $\sin\alpha = \frac{|KM|}{|JK|}$ pa slijedi $|KM| = |JK| \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}cm$ što je točno polovica duljine stranice traženog kvadrata.

Na posljetku, iz Dudeneyjeve konstrukcije četverokuta *MM'L''L'* slijedi:

$$|MM'| = 2 \cdot |KM| = 2 \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{2} = \sqrt[4]{3}\,cm$$
$$|ML'| = |ME| + |EL'| = |JL| + |LE| = |JE| = \sqrt[4]{3}\,cm$$

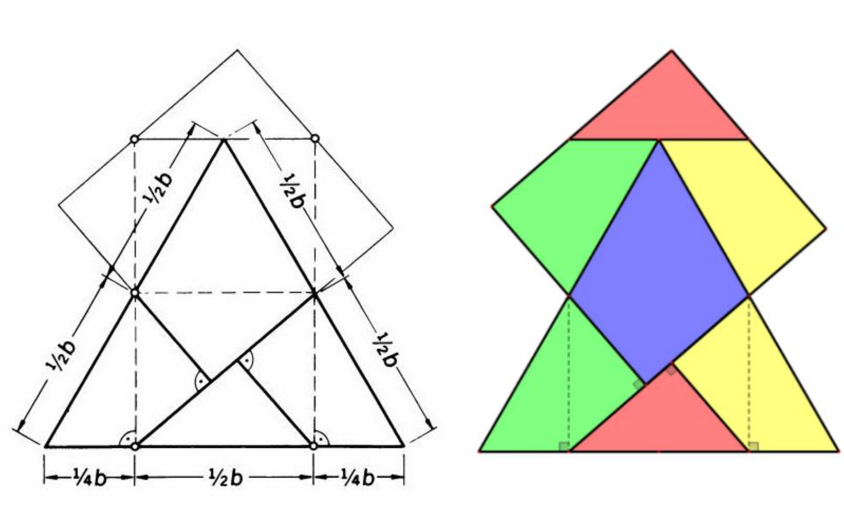
pri čemu jednakost $|ME| = |JL|$ slijedi iz sukladnosti trokuta ΔDJL i ΔMKE što se obrazlaže u nastavku.

Prethodnim je pokazano da su sve stranice četverokuta *MM'L''L'* jednakih duljina i da odgovaraju duljini stranice traženog kvadrata koji se želi konstruirati.

Konačno, može se zaključiti da je četverokut *MM'L''L'* dobiven preslagivanjem dijelova jednakostraničnog trokuta ΔABC kvadrat jer ima sve stranice jednakih duljina i sva četiri kuta prava.

3.3. Steinhausovo rješenje problema: kvadrat ili pravokutnik?

Da je *The Haberdasher's Puzzle* problem, odnosno problem presijecanja jednakostraničnog trokuta na četiri dijela, čijim se preslagivanjem dobiva kvadrat, „jedna od perjanica zabavne matematike, svjedoči i interes koji je pobudio kod dijela uglednih matematičara znanstvenika. Tako ga je zapazio i Hugo Steinhaus uvrstivši ga“ u svoju zbirku *Mathematical Snapshots* (Dakić, 2018, str. 79). Steinhaus u svojoj knjizi ovaj problem predstavlja kao prvi *mathematical snapshot* odnosno vizualni dokaz bez puno riječi (Slika 7), a je li njegov vizualni dokaz svojom jednostavnošću zaista prikaz uspješno riješenog problema, još ćemo pokazati. Morris Kline u svome je predgovoru Steinhausove *Mathematical Snapshots* zbirke u izdanju iz 1983. napisao da „matematički dokaz zahtijeva više od intuicije i zaključivanja na temelju posebnih slučajeva ili vizualnih dokaza“, a je li kada je to napisao bio u pravu (barem što se ovog slučaja tiče), pokazat ćemo u nastavku poglavlja (Steinhaus, 1983, predgovor Morrisa Klinea).



Slika 7. Steinhausov izvorni vizualni dokaz (lijevo) (*Mathematical Snapshots*, 1983)
i njegova rekonstrukcija (desno)

Kao što je i profesor Dakić primijetio, interes za Dudeneyjev *The Haberdasher's Puzzle* problem još od njegova prva objavljivanja nije presušio. Uz Steinhausa, u svoje su ga matematičke zbirke, a i brojne druge knjige za popularizaciju matematike uvrstili i obradili mnogi svjetski matematičari. Martin Gardner u svojoj knjizi *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Ian Stewart u *The Problems of Mathematics*, David Wells u *The Penguin Dictionary of Curios and Interesting Geometry* i Greg N. Frederickson u *Hinged*

Dissections: Swinging and Twisting samo su neki od autora koji su se u svojim knjigama dotaknuli ovoga problema.

Uz prethodno nabrojane, a i mnoge druge svjetske matematičare, i profesor Dakić je u jedno od svojih dijela, točnije u knjižicu *Matematika u boji – Dokazi bez riječi*, uvrstio Dudeneyjev *The Haberdasher's Puzzle* problem. Naime, Dakić svojim čitateljima na dvije stranice donosi ključne informacije o samome problemu i njegovu autoru. Uz sliku konstrukcije donosi i njezin opisani postupak kojeg je Dudeney ponudio kao rješenje, ali isto tako u svoju razradu problema uključuje i informaciju o još jednom, naočigled jednostavnijem rješenju.

Dakić (2018) iznosi: „Da je ovaj problem jedna od perjanica zabavne matematike, svjedoči i njegova zastupljenost na internetu kao i u interesu koji je pobudio kod dijela uglednih matematičara znanstvenika. Tako ga je zapazio i Hugo Steinhaus uvrstivši ga u svoj *Matematički kaleidoskop*. Steinhausovo rješenje jednostavno je rekonstruirati.“ No, je li Steinhausovo rješenje zaista tako jednostavno kako je i profesor Dakić napisao? Je li i on, kao i mnogi prije, ostao zadivljen jednostavnošću Steinhausova postupka konstrukcije problema i povjerovao intuiciji i kako Kline kaže „zaključivanju na temelju posebnih slučajeva ili vizualnih dokaza“ bez da je provjerio i to sve matematičkim postupkom dokazao ili je čitatelju ostavio prostora za razmišljanje i polemiziranje o naizgled jednostavnom rješenju iza kojeg se krije nešto drugačiji ishod od predviđenoga?

Jesu li Steinhaus i profesor Dakić svojim čitateljima namjerno priložili rješenje koje zbog ljepote svoje jednostavnosti poziva na provjeru istinitosti ili su pak ne razradivši dokaz Steinhausova rješenja prije njegova uvrštavanja u svoje knjige vizualnih matematičkih dokaza pogriješili, ostaje nam provjeriti. Moguće je samo nagađati jesu li obojica autora ponudila jednostavnije, naizgled točno, ali pogrešno rješenje kako bi čitatelja isprovocirali i potaknuli interes za priloženi problem ili im se potkrala pogreška.

Prema nazivu ovoga poglavlja može se naslutiti da je kod Steinhausova rješenja presijecanja jednakostraničnog trokuta na četiri dijela čijim se preslagivanjem dobije kvadrat upitno upravo preslagivanje u lik kvadrata. „Uspoređujući sliku Steinhausova rješenja (Slika 7) sa slikom rekonstrukcije Dudeneyjeva rješenja (Slika 5, desno), zaista se na prvi pogled može zaključiti da se radi o istoj podjeli jednakostraničnog trokuta te da je Steinhaus to napravio na mnogo jednostavniji i praktičniji način.“ (Grubić i Baranović, 2021, str. 80) No, kako je

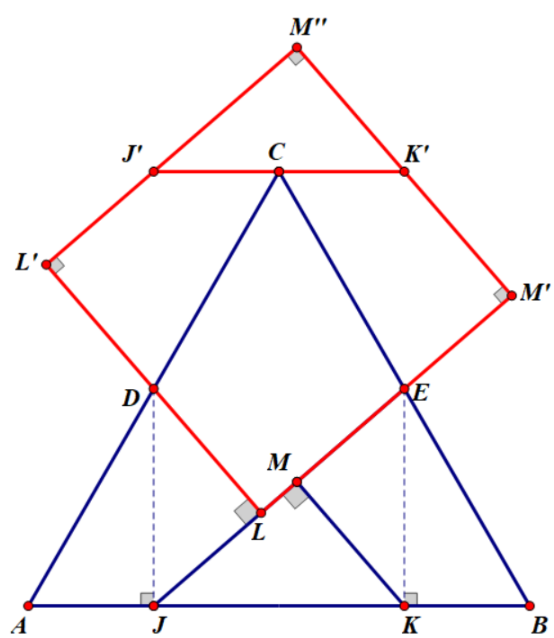
Steinhausovo rješenje dano bez formalnog dokaza, postalo je poticaj da se provjeri vrijedi li slika više od tisuću riječi ili to u ovom slučaju nije tako.

Jednostavnost rješenja ovog složenog geometrijskog problema zaintrigirala nas je da konstrukciju izvedemo u programu dinamičke geometrije, a zatim njezinu valjanost provjerimo formalnim dokazom (Grubić i Baranović, 2021).

Konstrukcija prema Steinhausovu vizualnom dokazu u programu dinamičke geometrije provodila se na sljedeći način:

1) Konstrukcija jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ prema osnovnoj konstrukciji trokuta *SSS*.
2) Konstrukcijom simetrala dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ odrede se polovišta D i E redom.
3) Konstrukcijom okomica kroz točke D i E na stranicu $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ odrede se nožišta okomica J i K redom.
4) Konstrukcija okomica kroz točke D i K na dužinu $\overline{JE}$. Nožišta okomica točke su L i M redom.

Ako se svi opisani koraci ispravno izvedu, jednakostranični trokut $\triangle ABC$ dužinama $\overline{JE}$, $\overline{DL}$ i $\overline{MK}$ bit će podijeljen na četiri dijela, od kojih se, prema Steinhausu, preslagivanjem kao na slici može oblikovati kvadrat $LM'M''L'$ (Slika 8).



Slika 8. Konstrukcija Steinhausova rješenja (Grubić i Baranović, 2021, str. 81)

Međutim, provođenjem konstrukcije na opisani način u programu dinamičke geometrije te mjerenjem duljina stranica nastalog četverokuta brzo se ustanovi da su nasuprotne stranice jednakih duljina, ali da susjedne nisu. Iz toga se može zaključiti da dano rješenje nije rješenje *Haberdasherova problema*, ali svakako je potrebno provesti i formalni dokaz.

3.4. Provjera valjanosti Steinhausova rješenja

U vlastitome predgovoru *Mathematical snapshots* (1983) zbirke, Hugo Steinhaus čitatelju ukratko objašnjava razloge svoga pisanja i kako je došao na ideju satkati ovo djelo. Prvo što napominje jest da bi predstavljajući ovu knjigu čitatelju želio naglasiti kako njegova svrha pisanja nije bila poučavati u uobičajenome smislu riječi niti zabavljati čitatelja samim sadržajem. Ideju za njezino pisanje dobio je u parku kada je na neznančevo pitanje o tome što matematičari rade po cijele dane štapićem po šljunčanome putu ucrtavao razne riješene i neriješene geometrijske probleme te mu ih pokušao približiti i objasniti. Kako je i sam napisao: „To je bilo kako sam zamišljao ovu knjigu, u kojoj skice, dijagrami i fotografije pružaju izravan jezik i omogućuju izbjegavanje dokaza izravnim jezikom odnosno dopuštaju izbjegavanje ili barem smanjivanje dokaza na minimum." (Steinhaus, 1983).

Steinhaus je imao jako dobru namjeru u približavanju Dudeneyjeva problema *presijecanja jednakostraničnog trokuta na četiri dijela čijim se preslaganjem dobije kvadrat* svakom nestručnom matematičkom čitatelju. On je na što jednostavniji način iz samog vizualnog dokaza htio pokazati svu ljepotu svog jednostavnog rješenja ovog složenog problema ni ne sluteći da ono možda i nije ispravno. Naime, pogledamo li konstrukciju Dudeneyjeva rješenja (Slika 6) i sam postupak njegova konstruiranja te ga usporedimo sa Steinhausovim jednostavnim vizualnim dokazom (Slika 7), na prvi pogled moglo bi se zaključiti da se radi o istoj podjeli jednakostraničnog trokuta, odnosno da su presječeni dijelovi tog trokuta i u Dudeneyja i u Steinhausa u potpunosti jednaki te da je Steinhaus to napravio na mnogo jednostavniji i praktičniji način. Ljepota Steinhausova rješenja odražava se upravo u jednostavnosti, ali ta jednostavnost ipak gubi bitku s formalnim matematičkim dokazom o čemu se razmatra u nastavku.

Radi jednostavnosti i bez smanjenja općenitosti, ali i radi usporedbe s prethodnom provjerom Dudeneyjeva rješenja, uzima se da je stranica jednakostraničnog trokuta ΔABC duljine $a = 4cm$. Dakle, potrebno je provjeriti jesu li sve stranice dobivenog četverokuta jednakih duljina i jesu li svi unutrašnji kutovi pravi.

U skladu s opisanom konstrukcijom utvrđuje se da su kutovi četverokuta $LM'M''L'$ pravi jer vrijedi sljedeće:

1) kut pri vrhu *L* je pravi prema konstrukciji
2) kut pri vrhu *L'* je pravi jer je nastao rotacijom kuta pri vrhu *L*
3) kut pri vrhu *M'* je pravi jer je nastao rotacijom kuta pri vrhu *M*, koji je pravi prema konstrukciji i
4) kut pri vrhu *M''* je pravi jer je nastao translacijom kuta pri vrhu *M*.

Iz svega navedenog može se zaključiti da je četverokut *LM'M''L'* pravokutnik i njegove nasuprotne stranice jednakih su duljina, to jest: $|LM'| = |L'M''|$ i $|LL'| = |M'M''|$.

Još treba provjeriti je li ovaj pravokutnik zaista kvadrat tako što će se provjeriti jesu li susjedne stranice pravokutnika jednakih duljina, odnosno vrijedi li: $|LL'| = |LM'|$.

Prema konstrukciji, točke *D* i *E* polovišta su stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, redom, iz čega slijedi da je dužina $\overline{DE}$ srednjica trokuta ΔABC pa je paralelna sa stranicom $\overline{AB}$, a duljina joj je jednaka polovini duljine te stranice: $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$. Kako su dužine $\overline{DJ}$ i $\overline{EK}$ povučene iz polovišta *D* i *E* okomito na istu stranicu $\overline{AB}$ one su međusobno paralelne i jednakih duljina pa vrijedi: $|DJ| = |EK|$ i $|JK| = |DE| = \frac{1}{2}|AB| = 2\,cm$, to jest četverokut *DJKE* je pravokutnik jer su nasuprotne stranice jednakih duljina, a kutovi pravi .

To znači da su šiljasti kutovi pravokutnih trokuta ΔAJD i ΔBEK veličine 60° i 30°. Nadalje, ti trokuti mogu se promatrati kao polovice jednakostraničnog trokuta pa su njihove stranice duljine $|AD| = |BE| = \frac{1}{2}|AB| = 2cm$ pri čemu su dužine $\overline{DJ}$ i $\overline{EK}$ visine tih trokuta pa su njihove duljine: $|DJ| = |EK| = \sqrt{3}\,cm$. U tom slučaju vrijedi $|DJ| \neq |JK|$, što znači da pravokutnik *DJKE* nije kvadrat.

Dužina $\overline{JE}$ kao dijagonala pravokutnika *DJKE* dijeli taj četverokut na dva sukladna pravokutna trokuta ΔDJE i ΔKEJ po poučku SSS. Kako su dužine $\overline{DL}$ i $\overline{KM}$ visine sukladnih trokuta na zajedničku stranicu $\overline{JE}$ one su međusobno sukladne, odnosno vrijedi $|DL| = |KM|$. Nadalje, kako se dijagonale pravokutnika ne sijeku pod pravim kutom može se zaključiti da su dužine $\overline{DL}$ i $\overline{KM}$ zajedno manje od polovice dijagonale $\overline{DK}$, odnosno vrijedi:

$$|LL'| = 2 \cdot |DL| = |DL| + |KM| < |DK| = |JE|\text{, to jest}$$

$$|LL'| < |JE|. \quad (1)$$

S druge strane, kako se trokuti ΔDJL i ΔKEM podudaraju u dva para stranica i kutu nasuprot većoj stranici ($|DL| = |KM|$, $|DJ| = |EK|$ i $|\angle DLJ| = 90° = |\angle KME|$) oni su sukladni po poučku $SSK^{>}$. Iz sukladnosti trokuta ΔDJL i ΔKEM slijedi: $|JL| = |ME| = |EM'|$ pa za drugu stranicu četverokuta *LM'M''L'* vrijedi:

$$|LM'| = |LM| + |ME| + |EM'| = |LM| + |ME| + |JL| = |JE|\text{, to jest}$$

$$|LM'| = |JE|. \quad (2)$$

Na temelju nejednakosti (1) i jednakosti (2) zaključuje se da susjedne stranice četverokuta *LM'M''L'* nisu jednakih duljina, odnosno četverokut *LM'M''L'* nije kvadrat.

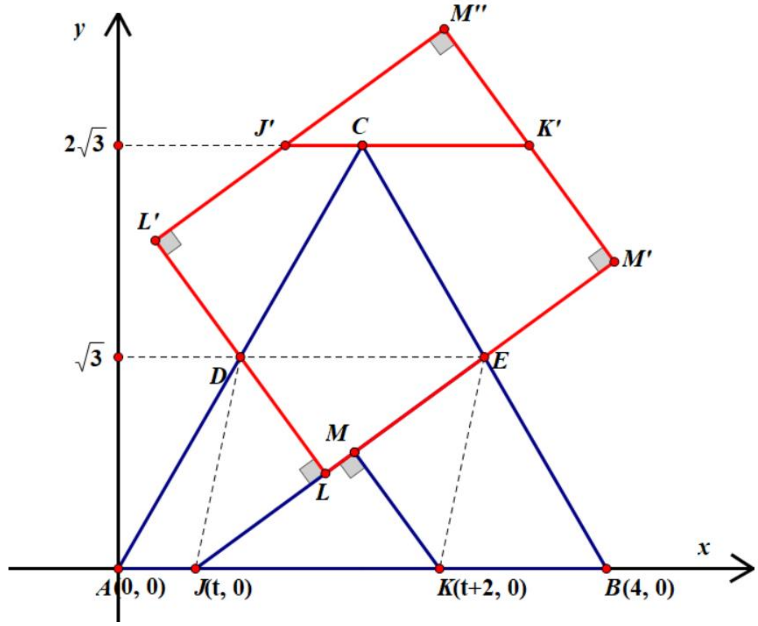
Dakle, ako točke *J* i *K* stranicu $\overline{AB}$ trokuta ΔABC dijele u omjeru 1 : 2 : 1, onda se prema opisanom dijeljenju trokuta na četiri dijela te preslagivanjem nastalih dijelova, prema Steinhausovu rješenju, ne dobiva kvadrat već pravokutnik. Konačno, može se zaključiti da Steinhausovo rješenje nije korektno rješenje *Haberdasherova problema* (Grubić i Baranović, 2021).

3.5. Određivanje omjera podjele stranice trokuta

U prethodnom dijelu pokazano je da Steinhausovo naizgled vrlo jednostavno rješenje, prema kojemu se osnovica jednakostraničnog trokuta dijeli u omjeru 1 : 2 : 1, nije korektno rješenje Dudeneyjeva *Haberdasherova* problema. To je dodatno motiv da se ispita u kojem omjeru točke *J* i *K* dijele stranicu $\overline{AB}$ trokuta ΔABC kako bi se reorganizacijom dijelova jednakostraničnog trokuta dobio kvadrat (Slika 6).

Daljnje istraživanje provodi se koordinatnom metodom, smještanjem jednakostraničnog trokuta ΔABC u pravokutni koordinatni sustav tako da je vrh *A* u ishodištu, vrh *B* na osi *x*, a vrh *C* u prvom kvadrantu (Slika 9). Dalje se koristi da je stranica tog trokuta duljine $4cm$. Prema postavljenom, koordinate vrhova trokuta ΔABC redom su: $A(0,0)$, $B(4,0)$ i $C(2,2\sqrt{3})$.

Prema konstrukciji točaka *D* i *E* kao polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom, određuju se njihove koordinate: $D(1,\sqrt{3})$ i $E(3,\sqrt{3})$.



Slika 9. Trokut u koordinatnom sustavu (Grubić i Baranović, 2021, str. 84)

Prema konstrukciji točaka *J* i *K* na stranici $\overline{AB}$, uočava se da će se točka *J* nalaziti na prvoj polovici dužine $\overline{AB}$ od vrha *A*, a točka *K* na drugoj polovici dužine prema točki *B*. Ako se udaljenost točke *J* od vrha *A* označi s t, $t \in [0,2]$, onda su koordinate točke *J*: $J(t,0)$, a koordinate točke *K* su $K(t+2,0)$, jer je $|JK| = 2$.

Kako bi se odredile duljine dužina $\overline{DL}$ i $\overline{KM}$ potrebno je odrediti jednadžbu pravca *JE*, a zatim udaljenost točaka *D* i *K* od tog pravca. Koordinate točaka *J* i *E* su poznate, $J(t,0)$ i $E(3,\sqrt{3})$ pa se za jednadžbu pravca *JE* dobiva:

$$JE....\sqrt{3}x + (t-3)y - \sqrt{3}t = 0. \quad (3)$$

Koordinate točaka *D* i *K* su poznate, $D(1,\sqrt{3})$ i $K(t+2,0)$, pa se prema formuli za udaljenost točke od pravca dobiva:

$$d(D,JE) = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot 1 + (t-3)\cdot\sqrt{3} - \sqrt{3}t\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (t-3)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+(t-3)^2}} \quad (4)$$

$$d(K,JE) = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot(t+2) + (t-3)\cdot 0 - \sqrt{3}t\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (t-3)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+(t-3)^2}}. \quad (5)$$

Iz jednakosti (4) i (5) može se zaključiti da su udaljenosti jednake, $d\left(D, JE\right) = d\left(K, JE\right)$, za bilo koju vrijednost t, $t \in [0,2]$, odnosno $|DL| = |KM|$.

Dalje se određuju duljine susjednih stranica pravokutnika *LM'M''L'* kako bi se ispitalo za koju vrijednost parametra *t* pravokutnik postaje kvadrat, odnosno u kojem omjeru točke *J* i *K* dijele stranicu $\overline{AB}$.

Prema konstrukciji za stranicu $\overline{LL'}$ vrijedi:

$$|LL'| = 2 \cdot |DL| = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+\left(t-3\right)^2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3+\left(t-3\right)^2}} . \quad (6)$$

Nadalje, četverokut *DJKE* (Slika 9) paralelogram je jer su mu stranice $\overline{DE}$ i $\overline{JK}$ paralelne i jednakih duljina. Prema svojstvu paralelograma i druge dvije stranice $\overline{DJ}$ i $\overline{KE}$ jednakih su duljina. Kako dijagonala $\overline{JE}$ dijeli paralelogram *DJKE* na dva sukladna trokuta ΔDJE i ΔKEJ, a dužine $\overline{DL}$ i $\overline{KM}$ visine su tih sukladnih trokuta na zajedničku stranicu $\overline{JE}$, može se zaključiti da su i dužine $\overline{DL}$ i $\overline{KM}$ jednakih duljina. Iz svega navedenog zaključuje se da su trokuti ΔDJL i ΔKEM sukladni po poučku $SSK^{>}$ jer se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot dulje stranice.

Iz sukladnosti trokuta ΔDJL i ΔKEM slijedi sukladnost stranica $\overline{JL}$ i $\overline{ME}$ to jest $|JM| = |LE|$. Konačno, za drugu stranicu pravokutnika *LM'M''L'* vrijedi:

$$|LM'| = |LE| + |EM'| = |JM| + |ME| = |JE| = \sqrt{3+\left(t-3\right)^2} . \quad (7)$$

Na temelju (6) i (7) slijedi da se dani jednakostranični trokut uz opisanu podjelu može preoblikovati u pravokutnik i to za bilo koju vrijednost parametra t, $t \in [0,2]$.

Postavi li se vrijednost udaljenosti t na $t = 1$, onda je riječ o Steinhausovu rješenju te je $|LL'| = \frac{4\sqrt{21}}{7} \approx 2,619$, a $|LM'| = \sqrt{7} \approx 2,646$, što je zapravo dobra aproksimacija kvadrata, ali je još uvijek riječ o pravokutniku. Kako bi se odredila vrijednost parametra t za koju pravokutnik *LM'M''L'* postaje kvadrat, potrebno je uočiti sljedeće: ako je stranica jednakostraničnog trokuta ΔABC duljine $a = 4$, onda je njegova površina jednaka $P_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}\, cm^2$ što je jednako i površini pravokutnika *LM'M''L'*, to jest $P_{LM'M''L'} = 4\sqrt{3}\, cm^2$ jer su oba lika sastavljena od jednakih dijelova. Ako je pravokutnik kvadrat, njegova je stranica duljine $b = 2\sqrt[4]{3}$. S druge strane, stranica kvadrata jednaka je $|LL'| = 2 \cdot |DL| = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3+(t-3)^2}}$ iz čega se izjednačavanjem $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3+(t-3)^2}} = 2\sqrt[4]{3}$ dobiva kvadratna jednadžba: $t^2 - 6t + 12 - 4\sqrt{3} = 0$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe po parametru t dobiva se: $t = 3 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$. Odnosno, za $t \approx 1.018$ pravokutnik $LM'M''L'$ postaje kvadrat (Grubić i Baranović, 2021).

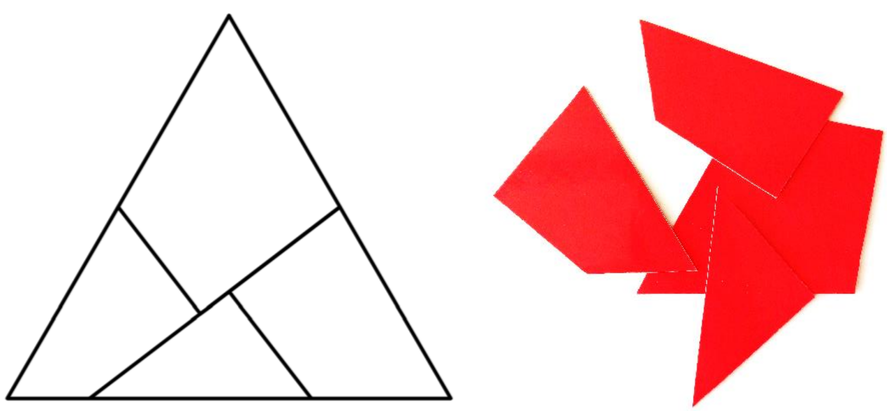
Prema jedinom točnom, Dudeneyjevom, rješenju, točke J i K stranicu $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ dijele u omjeru 1.018 : 2 : 0.982 iz čega je jasno zašto je Steinhausovo rješenje vizualno uvjerljivo jer je promatrani omjer njegova rješenja 1 : 2 : 1 što je zaista približno omjeru Dudeneyjeva rješenja. Ali, primjerice, uzmemo li stranicu trokuta duljine $a = 4m$, odstupanje bi bilo uočljivije i pogrešnost Steinhausova rješenja jasnija.

4. Primjena *Haberdasherova problema* u nastavi

Geometrija je sastavni dio matematičkih sadržaja svih razina obrazovanja, od primarnog do sekundarnog obrazovanja, ali i visokoškolskog, ovisno o vrsti studija. Stoga bi se opisani geometrijski problem preslagivanja dijelova jednakostraničnog trokuta u kvadrat mogao koristiti u nastavi matematike na svim razinama obrazovanja, ali prilagođeno uzrastu, predznanju učenika ili studenata i, što je najvažnije, s određenom svrhom i s određenim ciljem.

4.1. Slagalica Haberdasherova problema

Za učenike nižih razreda osnovne škole može se pripremiti slagalica *Haberdasherova problema* s ciljem uvođenja učenika u svijet geometrijske disekcije. Slagalica se vrlo jednostavno može izraditi od različito obojenih čvrstih kartonskih papira (Slika 10). Predložak za izradu *Haberdasherove slagalice* dan je u prilogu (Prilog 1), a slika je konstruirana prema Dudeneyjevom rješenju, pri čemu je stranica polaznog jednakostraničnog trokuta duljine 16. Korisno je koristiti istu slagalicu s različitim uzrastima kako bi se isti problem mogao razmatrati kroz različite aspekte: od samog slaganja, preko konstrukcije i mjerenja do dokaza.

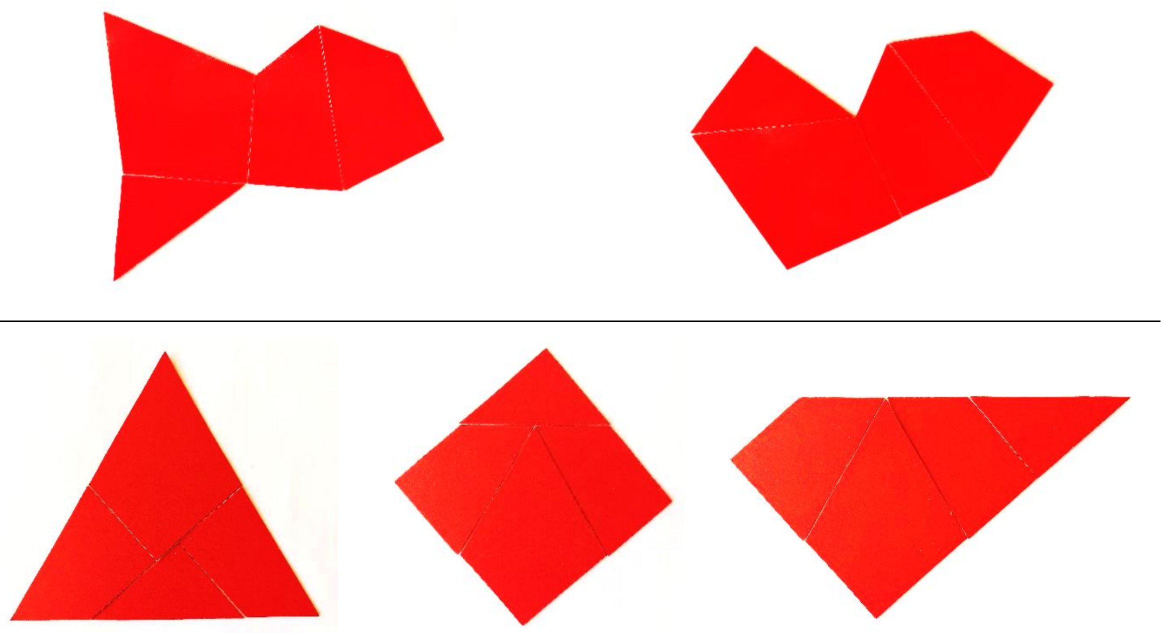


Slika 10. Predložak za slagalicu i model

Korištenjem svih dijelova slagalice mogu se oblikovati razne figure. Ako se postavi uvjet da se dijelovi slagalice ne smiju preokretati već slagati u figuru duž sukladnih stranica, bez preklapanja i bez praznina, broj mogućih figura se znatno smanjuje (Slika 11A). Ako se pri tome postavi uvjet da figure budu konveksne, onda je moguće oblikovati samo tri različite figure: jednakostranični trokut, kvadrat i trapez (Slika 11B).

A

B



Slika 11. Konveksne (B) i nekonveksne (A) figure

Stoga slaganje s učenicima nižih razreda može započeti slobodno, a zatim slaganjem trokuta (jednakostraničnog) i kvadrata te u višim razredima i slaganjem trapeza, kako bi se osvijestilo da likovi mogu biti različitih oblika i jednakih površina. S obzirom na to da je model slagalice napravljen prema Dudeneyjevom rješenju, oblikovani četverokuti zaista su kvadrat i pravokutni trapez.

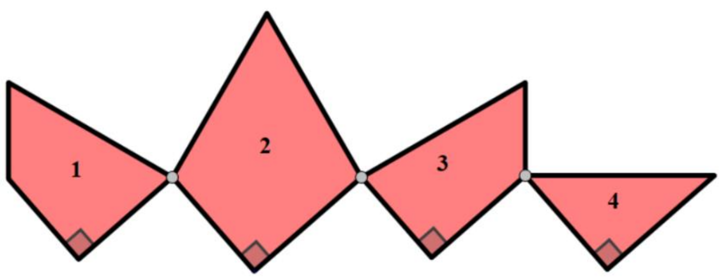
U početku učenici obično slažu metodom pokušaja i pogrešaka što je sasvim prirodan i legitiman proces, ali na taj način potrebno je prilično vremena dok se ne dođe do tražene figure trokuta ili četverokuta, a moguće je da se figura i ne dovrši. Zato je potrebno, nakon nekog vremena samostalnog slaganja, postupno usmjeravati učenike na razvijanje strateškog slaganja. Tako se na primjer na dijelovima slagalice mogu uočiti pravi kutovi koji se mogu iskoristiti za slaganje kvadrata s obzirom na to da su svi njegovi kutovi pravi. Iz oblika kvadrata, pomicanjem samo dijela u obliku trokuta brzo se može oblikovati pravokutni trapez. Zatim se za dobivanje trokuta može osvijestiti da su njegovi kutovi manji od 90°, što znači da se pravi kutovi trebaju složiti unutar trokuta tako da tvore puni kut, odnosno po dva ispružena kuta.

Nakon slaganja svakog lika prilika je da učenici opišu svoj način slaganja, pri čemu razmjenjuju svoje strategije slaganja, a istodobno razvijaju i svoj matematički način izražavanja uz usmjeravanje nastavnika.

Za oblikovane likove mogu se određivati opsezi, ovisno o predznanju učenika. Budući da je stranica polaznog trokuta poznata, jednostavno se određuje i njegov opseg: $O = 3 \cdot 16 = 48$, no za opseg kvadrata i trapeza potrebno je odrediti duljine njihovih stranica. U nižim razredima duljine stranica mogu se dobiti mjerenjem, što je prikladno provesti kad se obrađuje tema mjerenja u geometriji. Nakon što se obradi Pitagorin poučak u osmom razredu OŠ, duljine stranica mogu se odrediti izračunavanjem primjenom Pitagorina poučka i primjenom metode površine.

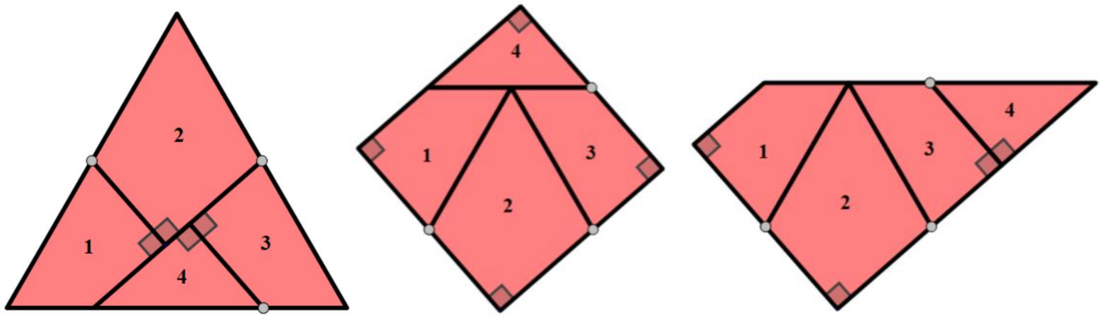
Nakon uspoređivanja opsega oblikovanih likova može se izvesti zaključak kako likovi različitih oblika imaju jednaku površinu jer su oblikovani od jednakih dijelova, ali različite opsege, pri čemu je trokut najvećeg, a kvadrat najmanjeg opsega.

Osim slagalice izrađene od kartona može se oblikovati drveni model po uzoru na opisane zglobne disekcije (vidjeti stranicu 9) ili ju barem ponuditi kroz vizualni prikaz (Slika 12) te u skladu s modelom postaviti zahtjev slaganja.



Slika 12. Zglobni model disekcije

Tako se na primjer može ponuditi zglobna disekcija kao na *slici 12* te zahtjev slaganja konveksnih likova. Ako postoji fizički model zglobne disekcije, onda je problem slaganja uvelike olakšan jer postoji daleko manje mogućnosti slaganja jednog dijela uz drugi s obzirom na to da četiri dijela tvore lanac, čiji se dijelovi mogu rotirati u smjeru ili u suprotnom smjeru kretanja kazaljki sata. Rotiranjem dijelova zglobne slagalice u jednom ili drugom smjeru može se oblikovati jednakostranični trokut, kvadrat i pravokutni trapez (Slika 13). Ukoliko se aktivnost provodi s učenicima u nižim razredima OŠ, kojima lik trapeza još nije poznat jer se obrađuje tek u šestom razredu, složeni lik može biti najava za obradu koja će se raditi u višim razredima.



Slika 13. Konveksni likovi iz zglobnog modela

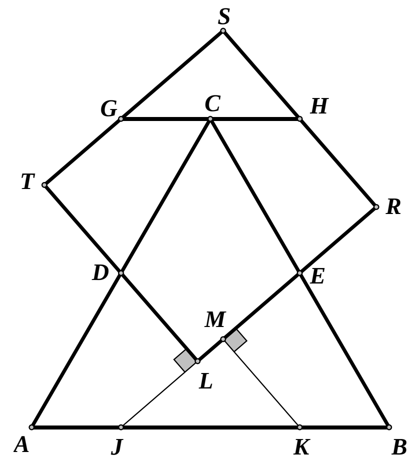
Ako je problem ponuđen kroz vizualni prikaz, onda dobivanje rješenja zahtijeva prostorno rotiranje i slaganje u mislima što je jedna od najzahtjevnijih vizualno-prostornih sposobnosti koje se mogu razvijati rješavanjem upravo problema ovoga tipa (Bruce i Hawes, 2014). Kroz ove aktivnosti svakako bi bilo korisno dobivena rješenja prikazati crtežom čime se dodatno razvija motorika ruku, ali i vizualno-prostorne sposobnosti.

4.2. Konstrukcija *Haberdasherova* problema

U višim razredima osnovne škole, nakon što učenici savladaju osnovne konstrukcije, *Haberdasherov* problem može se koristiti za vježbu kao primjer jedne složene konstrukcije. Pri izvođenju same konstrukcije korisno je da učenici proces konstruiranja opisuju verbalno, a zatim pisano i simbolički u svrhu razvijanja matematičkog rječnika. S obzirom na to da postoji opisana konstrukcija Dudeneyjeva rješenja, za konstruktivni se zadatak može iskoristiti Steinhausovo rješenje, pri čemu tekst zadatka može varirati.

Primjer: *Konstruirati trokut* ΔABC *i četverokut TLRS sa slike 14 ako je poznato: trokut* ΔABC *je jednakostraničan stranice duljine 8 cm, točke D i E polovišta su stranica* $\overline{AC}$ *i* $\overline{BC}$*, točke J i K odabrane su tako da dijele stranicu* $\overline{AB}$ *u omjeru 1 : 2 : 1, a četverokut je oblikovan od dijelova trokuta nastalih povlačenjem okomica iz polovišta D i E na dužinu* $\overline{JE}$*.*

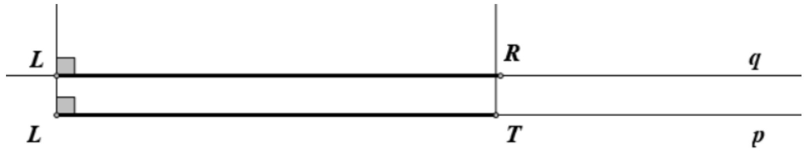
Složenu konstrukciju moguće je provoditi na više različitih načina pri čemu je važno odrediti ključne korake te osnovne i elementarne konstrukcije od kojih se ona sastoji. Na primjer, konstrukcija može započeti od jednakostraničnog trokuta prema konstrukciji SSS, polovišta *D* i *E* konstruiraju se simetralama stranica $\overline{AC}$ *i* $\overline{BC}$ redom, a točke *J* i *K* konstruiraju se dijeljenjem dužine $\overline{AB}$ na četiri jednaka dijela. Konstruiranjem okomica iz D i E na dužinu (pravac) $\overline{JE}$ dobivaju se nožišta L i M čime je polazni trokut podijeljen na četiri dijela (Slika 14).



Slika 14. Konstrukcija Steinhausova rješenja

Kako četverokut $CGTD$ nastaje rotacijom četverokuta $AJLD$ oko točke D za 180°, a četverokut $CERH$ rotacijom četverokuta $BEMK$ oko točke E za 180°, konstrukcija četverokuta $TLRS$ može se provesti na sljedeći način: (1) dužina $\overline{TD}$ nastaje prenošenjem dužine $\overline{DL}$ na polupravac LD od točke D, a dužina $\overline{ER}$ prenošenjem dužine $\overline{ME}$ na polupravac ME od točke E; (2) kroz točku T konstruira se okomica t na polupravac LD, a kroz točku R okomica r na polupravac ME; (3) presjek okomica t i r daje točku S pa se istaknu dužine $\overline{TS}$ i $\overline{RS}$ četverokuta $TLRS$; (4) konačno konstrukcijom paralele p kroz točku C sa stranicom $\overline{AB}$ u presjeku sa stranicama četverokuta $\overline{TS}$ i $\overline{RS}$ dobivaju se točke G i H, redom. Time je konstruiran četverokut $TLRS$ sa svim dijelovima.

Nakon što se provede i opiše konstrukcija, može se povesti i rasprava o vrsti dobivenog četverokuta. Prema koracima konstrukcije lako se može zaključiti da se radi o pravokutniku, a provjera je li dobiveni pravokutnik zapravo kvadrat, kako vizualni prikaz daje naslutiti, može se provjeriti geometrijskim uspoređivanjem njegovih stranica (Slika 15).

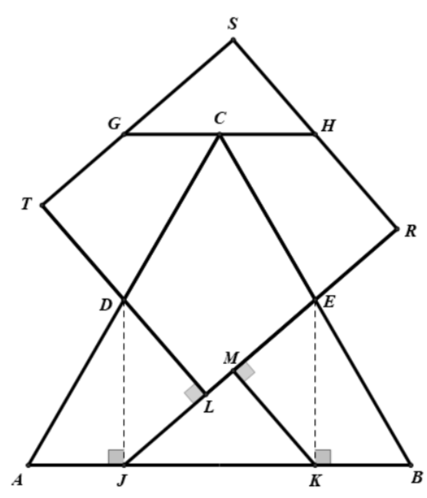


Slika 15. Geometrijsko uspoređivanje stranica četverokuta

Prenošenjem dužina (stranica) $\overline{LT}$ i $\overline{LR}$ na paralelne polupravce od točaka koje se nalaze na okomitom pravcu može se izvesti zaključak da susjedne stranice ipak nisu jednakih duljina, iako je razlika vrlo mala, što znači da konstruirani pravokutnik nije kvadrat. Povećavanjem duljine strance polaznog trokuta razlika bi bila uočljivija iako bi vizualno pravokutnik i dalje izgledao kao kvadrat jer se radi o vrlo bliskoj aproksimaciji (vidjeti stranicu 25).

4.3. Razvoj argumentacije i dokaza uz *Haberdasherov* problem

Poznavanjem teorema o sukladnosti trokuta, Pitagorina poučka te osnovnih svojstava četverokuta osigurava dovoljno predznanja za provođenje argumentirane rasprave i formalnog dokaza. Time se mogu baviti već učenici pred kraj osnovne škole te učenici srednjih škola ovisno o usmjerenju. Ljepota ovog problema je u tome što se može rješavati i argumentirati na različite načine korištenjem različitih matematičkih sadržaja i na taj način stvarati funkcionalnu mrežu znanja. Kada se s učenicima raspravlja o različitim pristupima u svrhu traženja optimalnog rješenja razvijaju se različite strategije rješavanja problema te se postiže dublje razumijevanje i funkcionalno povezivanje naučenog. Proučavanjem graničnih slučajeva, kao što je u ovom slučaju kvadrat poseban slučaj pravokutnika, učenici se na prirodan način uvode u proces logičkog zaključivanja i samim time lakše shvaćaju potrebu za dokazom (Grubić i Baranović, 2021). Konačno, nakon niza slaganja, konstruiranja, istraživanja i argumentiranja prirodno je kao krunu svega provesti i formalni dokaz korištenjem poznatih definicija, aksioma i dokazanih tvrdnji. Zadatak istraživanja i formalnog dokazivanja može se postavljati na različite načine, bilo da uključuje oblikovanje kvadrata (Dudeneyjevo rješenje) ili pravokutnika (Steinhausovo rješenje).



Slika 16. Provjera Steinhausova rješenja

Primjer: *Zadan je jednakostranični trokut* ΔABC*, stranice duljine* $a = 8cm$ (Slika 16). *Točke D i E polovišta su stranica* $\overline{AC}$ *i* $\overline{BC}$*. Točke J i K nožišta su okomica iz točaka D i E na stranicu* $\overline{AB}$ *redom, a točke L i M nožišta okomica iz točaka D i K na dužinu* $\overline{JE}$ *redom. Tako je trokut* ΔABC *dužinama* $\overline{JE}$*,* $\overline{DL}$ *i* $\overline{MK}$ *podijeljen na četiri dijela, a preslagivanjem tih dijelova nastao je četverokut LRST. Je li tako nastali četverokut LRST kvadrat? Svoj odgovor obrazložite.*

U tekstu ovog zadatka nije naznačeno da se dokaže da je četverokut *LRST* kvadrat, već se postavlja problem ispitivanja uz obrazloženje što se može provesti formalnim dokazom, ali i slobodnijom argumentacijom. Svakako prvo treba osvijestiti da za provjeru je li nastali četverokut *LRST* kvadrat treba provjeriti da su svi kutovi četverokuta pravi i da su sve stranice jednakih duljina. Tek nakon toga može započeti istraživanje i argumentacija.

Iako problem spada u kognitivno zahtjevne zadatke, za njegovo rješavanje dovoljna su znanja koja se stječu u višim razredima osnovne škole: svojstva rotacije, sukladnost trokuta, svojstva pravokutnika i Pitagorin poučak.

Prvi dio: određivanje veličine kutova četverokuta *LRST*.

S obzirom na to da je četverokut *LRST* nastao preslagivanjem dijelova trokuta ΔABC (Slika 16) može se zaključiti da vrijedi: $\measuredangle DTG = \measuredangle DLJ = 90°$, $\measuredangle HRE = \measuredangle KME = 90°$, $\measuredangle GSH = \measuredangle JMK = 90°$ i $\measuredangle ELD = 90°$.

Budući da su svi kutovi četverokuta pravi, može se zaključiti da je četverokut *LRST* pravokutnik iz čega slijedi da su nasuprotne stranice četverokuta jednakih duljina, to jest $|LT| = |RS|$ i $|LR| = |TS|$.

Drugi dio: određivanje duljina susjednih stranica.

Budući da su nasuprotne stranice jednakih duljina, potrebno je još provjeriti jesu li i susjedne stranice jednakih duljina to jest vrijedi li $|LT| = |LR|$.

Iz teksta zadatka proizlazi podatak o duljini stranice jednakostraničnog trokuta ΔABC, $a = |AB| = |AC| = |BC| = 8cm$. Kako su točke *D* i *E* polovišta stranica $|AC|$ i $|BC|$ redom, vrijedi sljedeće: $|AD| = |DC| = |BE| = |EC| = 4cm$ i $|DE| = \frac{1}{2}|AB| = 4cm$.

Prema formuli za visinu jednakostraničnog trokuta vrijedi: $v = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,cm$, iz čega slijedi da je duljina okomica iz točaka D i E na osnovicu $\overline{AB}$ jednaka: $|DJ| = |EK| = \frac{v}{2} = 2\sqrt{3}\,cm$.

Četverokut $JKED$ je pravokutnik pa vrijedi: $|JK| = |DE| = 4\,cm$.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ΔJKE dobiva se duljina dijagonale pravokutnika $JKED$: $|JE|^2 = 4^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16 + 12 = 28$ pa je $|JE| = 2\sqrt{7}\,cm$.

Primjenom metode površine na pravokutni trokut ΔJKE dobiva se duljina okomice spuštene iz točke K na dijagonalu $\overline{JE}$ pravokutnika $JKED$:

$$\frac{|JE| \cdot |MK|}{2} = \frac{|JK| \cdot |KE|}{2}$$

$$2\sqrt{7} \cdot |MK| = 4 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$|MK| = \frac{4\sqrt{21}}{7}\,cm.$$

Budući da su trokuti ΔDJL i ΔMKE sukladni po poučku KSK (sukladni odgovarajući kutovi uz sukladne stranice $\overline{DJ}$ i $\overline{KE}$) vrijedi: $|DL| = |MK| = \frac{4\sqrt{21}}{7}\,cm$ kao i $|JL| = |ME| = |ER|$.

Nadalje, prema konstrukciji dobivenoj preslagivanjem dijelova trokuta, vrijedi da je $|DL| = |DT|$ pa je $|LT| = 2 \cdot |DL| = \frac{8\sqrt{21}}{7}\,cm$, što je duljina stranice $\overline{LT}$ pravokutnika *LRST*.

Konačno, za susjednu stranicu $\overline{LR}$ pravokutnika *LRST* vrijedi:

$$|LR| = |LE| + |ER| = |JM| + |ME| = |JE| = 2\sqrt{7}\,cm.$$

Prema dobivenim duljinama susjednih stranica pravokutnika *LRST* slijedi: $|LT| \neq |LR|$, što znači da pravokutnik *LRST* nije kvadrat.

Iz opisanog procesa određivanja duljina susjednih stranica može se uočiti važnost i vještina povezivanja različitih sadržaja u funkcionalnu mrežu znanja kako bi se došlo do rješenja postavljenog problema. Na sličan način opisani *Haberdasherov problem* može se koristiti u radu sa srednjoškolskim učenicima, ali i sa studentima, ovisno o vrsti usmjerenja te postavljenom cilju primjene korištenog problema.

4.4. *Haberdasherov* problem na natjecanjima

Predstavljeni i njima slični zadatci mogu se koristiti na različite načine i u različite svrhe. Na primjer, pored uvježbavanja i primjene različitih sadržaja zadatci se mogu koristiti i u pripremi učenika za razne vrste natjecanja, a mogu biti i sastavni dio natjecanja, kako unutar same matematike, tako i u drugim područjima.

Tako se ovaj problem može iskoristiti i u nastavi informatike posebno pri razvoju računalnog načina razmišljanja te razvoju sposobnosti generalizacije kao posebnog oblika apstrakcije. Pri stvaranju generalizacije neke cjeline posebno je važno identificiranje dijelova te cjeline te njihovo povezivanje u svrhu stvaranja te cjeline. Kako bi se dijelovi cjeline međusobno povezivali potrebno je uočiti njihove međusobne odnose jer bez uspostavljanja zajedničkih odnosa svih odgovarajućih dijelova nije ni moguće formirati traženu cjelinu.

U razvoju računalnog načina razmišljanja koje pojedinca priprema za mnoga područja djelovanja, kako osobna tako i poslovna, među metodama rješavanja problema javljaju se apstrakcija i generalizacija. Uz prepoznavanje, analizu i primjenu mogućih rješenja s ciljem postizanja učinkovitog rezultata, vodeći računa o dostupnim resursima, informacije se najprije prikazuju kroz apstrakcije, a zatim se primjenom generalizacije provedeni proces rješavanja problema primjenjuje na čitav niz sličnih problema. Slično tome, generalizacija se primjenjuje pri rješavanju raznih vrsta geometrijskih disekcija među koje spada i ovaj izdvojeni specifični slučaj geometrijske disekcije jednakostraničnog trokuta na najmanji broj dijelova, koji se bez preokretanja mogu presložiti u kvadrat.

Nadalje, ovaj problem može se upotrijebiti i kao problemski zadatak na raznim natjecanjima iz informatike. Jedno je od takvih natjecanja koje se provodi među različitim uzrastima i međunarodno natjecanje *Dabar* u koje je Republika Hrvatska uključena od 2016. godine. Dabar je natjecanje koje promiče informatiku i računalno razmišljanje među učiteljima i učenicima, ali i u široj javnosti. „Dabar je osmišljen kako bi se svoj djeci omogućilo jednostavno sudjelovanje kroz online natjecanje, koje se sastoji od niza izazovnih zadataka osmišljenih od strane stručnjaka iz pedesetak zemalja, a od 2016. u izradi zadataka sudjeluju i hrvatske učiteljice i učitelji. Organizator natjecanja za Hrvatsku udruga je *Suradnici u učenju* uz podršku *Hrvatskog saveza informatičara*, *Visokog učilišta Algebra* i *CARNET-a*, a pod pokroviteljstvom *Ministarstva znanosti i obrazovanja*." (Suradnici u učenju, https://ucitelji.hr)

Tako je tijekom provođenja istraživanja za izradu ovog diplomskog rada dan prijedlog zadatka za međunarodnu bazu *Dabar* zadataka (Prilog 2). Naime, pri sudjelovanju u izradi *DabroStudent* i *DabroUčitelj 2021* natjecanja kao dio suradnje *Nastavne baze Filozofskog fakulteta u Splitu* i udruge *Suradnici u učenju* pripremali su se zadatci za natjecanje koje će se provoditi 2022. godine. U prijedlogu zadatka iskorišten je Dudeneyjev *Haberdasherov problem* kao poveznica matematičkog i računalnog razmišljanja u testiranju sposobnosti vizualizacije, apstrakcije i na kraju generalizacije danog problema. Zadatak je predstavljen na međunarodnoj radionici *Dabar* organiziranoj u Strumici u Sjevernoj Makedoniji od 16. do 20. svibnja 2022. godine na kojoj su se okupile zemlje članice natjecanja *Dabar* iz cijeloga svijeta. Glavni je cilj bio okupiti stručnjake iz različitih zemalja radi rasprave i razvoja zadataka koji će se koristiti za izazov tijekom 2022. godine u sve 74 zemlje članice. Zadatak priložen kao *prilog 2* također je prošao analizu sudionika te je vraćen na doradu s komentarima i mišljenjima spomenutih. Neki od komentara i prijedloga bili su:

1. *Ideja je zanimljiva, iako je možda malo teže shvatiti kako funkcionira.*

2. *Iz dane slike teško je zamisliti kako funkcionira preklapanje i koje će se figure dobiti, pogotovo ako do sada niste bili upoznati s takvim slagalicama/konstrukcijama. Predlažem da se postavi primjer s dva dijela kako bi se pokazalo kako funkcionira.*

3. *Trebalo je neko vrijeme da shvatim kako se komadi savijaju i koliko. Možda spomenuti da ih je potrebno rotirati dok svaki komad ne dodirne sljedeći na cijelom rubu, bilo u smjeru desno ili lijevo.*

Prema danim komentarima vidljivo je da se radi o kognitivno zahtjevnom zadatku, ali potencijalno dobrom zadatku za mjerenje vizualno-prostornih sposobnosti. Nakon dorade, zadatak je upućen u daljnju proceduru u kojoj se može uvrstiti na jedno od narednih natjecanja.

5. Istraživanje temeljeno na *Haberdasherovu* problemu

U teorijskom dijelu rada prikazano je da *Haberdasherov* problem spada u grupu kognitivno zahtjevnih zadataka. Također, dano je nekoliko različitih prijedloga kako bi se opisani problem mogao koristiti na svim razinama obrazovanja uz prilagođavanje predznanjima učenika te s određenom svrhom provođenja. S obzirom na to da opisani problem okupira pozornost stručnjaka raznih područja više od 100 godina, planirano je istraživanje koje se temelji upravo na opisanome problemu sa studentima različitih studijskih programa.

5.1. Cilj istraživanja

Cilj planiranog istraživanja bio je ispitati kako se studenti različitih studijskih programa snalaze u rješavanju *Haberdasherova* problema danas, s današnjim znanjima i u današnjem sustavu obrazovanja, odnosno je li taj problem još uvijek kognitivno zahtjevan. Nadalje, cilj je bio ispitati može li se *Haberdasherov* problem koristiti kao instrument za testiranje određenih znanja i vještina.

Kako bi se ispitali različiti aspekti *Haberdasherova* problema kao instrumenta, oblikovane su različite varijante zadataka s planom da se provedu s različitim grupama sudionika istraživanja.

5.2. Sudionici istraživanja

U istraživanju je sudjelovalo 185 studenata različitih studijskih programa i različitih godina studiranja, od čega je 41 student s *Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu*, a 144 studenta s *Filozofskog fakulteta u Splitu*. Svi sudionici dobrovoljno su sudjelovali u istraživanju. Osobne informacije o sudionicima nisu tražene već je svakom studentu pridružen jedinstveni kod kako bi se zadovoljili etički aspekti anonimnosti edukacijskog istraživanja (Cohen, Manion & Morrison, 2007, str. 61).

Prvu grupu sudionika istraživanja (*Grupa 1*) činili su studenti *Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu* s *Odsjeka za Matematiku* studijskih programa: *Matematika – smjer matematički*, *Matematika – smjer računarski*, *Matematika i Informatika* te *Matematika i Fizika*. Drugu grupu sudionika istraživanja (*Grupa 2*) činili su studenti *Filozofskog fakulteta u Splitu* s *Odsjeka za Učiteljski studij* (kraće *Učiteljski studij*) svih studijskih godina. Treću grupu sudionika istraživanja (*Grupa 3*) činili su studenti *Filozofskog fakulteta u Splitu* s različitih kombiniranih dvopredmetnih diplomskih studija: *Povijest, Povijest umjetnosti, Filozofija, Pedagogija*, *Engleski jezik*, *Hrvatski jezik* i *Talijanski jezik* (kraće *Dvopredmetni studij*).

5.3. Instrument istraživanja

Za prvu grupu sudionika pripremljene su dvije varijante zadatka u kojima je trebalo ispitati, postaviti i dokazati tvrdnju *Haberdasherova* problema. U prvoj varijanti zadatka (*Zadatak 1*) postavljen je dodatni zahtjev da se opiše postupak konstruiranja (*Prilog 3*). Svrha ovog zadatka bila je ispitati proces dokazivanja kroz četiri faze te proces razlaganja složenog konstruktivnog zadatka na osnovne i elementarne konstrukcije. U drugoj varijanti zadatka (*Zadatak 2*) u kojem je na početku dodan motivacijski uvod u problem, isključen je konstruktivni postupak, a umjesto traženja strogog matematičkog dokaza, zadana je konkretna duljina stranice trokuta te se tražilo ispitivanje i postavljanje tvrdnje *Haberdasherova* problema uz obrazloženja (*Prilog 4*). Na taj je način zadatak pojednostavljen jer se umjesto ispitivanja istinitosti *Haberdasherova* problema formalnim dokazom zaključak mogao izvesti i temeljem izračunavanja određenih elemenata, zbog poznavanja duljine stranice trokuta. Pri tome je svrha zadatka i dalje ispitivanje procesa argumentiranja, ali ne kroz strogi matematički dokaz već kroz jednostavniju (neformalnu) argumentaciju.

Obje varijante zadatka analogne su zadatku opisanome na stranicama *27* i *30* iz čijeg je opisa vidljivo da je za rješavanje postavljenih zadataka potrebno poznavanje: *osnovnih svojstava trokuta i četverokuta*, *teorema o sukladnosti trokuta* i *Pitagorina poučka* te *procesa dokazivanja*. Sva potrebna znanja stječu se kroz matematičko obrazovanje do kraja osnovne škole, dok se formalni dokaz usvaja samo dijelom u srednjoj školi. Stoga su za rješavanje ovih zadataka odabrani studenti matematičkog fakulteta koji se više bave procesom dokazivanja i logičkom argumentacijom, kako bismo bili sigurni da imaju dovoljno potrebnih predznanja.

Za drugu i treću grupu sudionika pripremljena je treća varijanta zadatka (*Zadatak 3*) u kojem se *Haberdasherov* problem smješta u kontekst rasklopne igračke, što je opisano na stranici *26* ovoga rada (*Prilog 5*). Zbog načina postavljanja problema, očekivano je da za njegovo rješavanje nije potrebno predznanje te da svi studenti bez obzira na studijsko usmjerenje imaju potrebne sposobnosti. Svrha ovog zadatka bila je ispitati vještine prostornog rotiranja i slaganja u mislima te vještine crtanja dobivenih rješenja, odnosno odgovarajuće vizualno-prostorne vještine. Stoga su za rješavanje ovako postavljenog problema odabrani studenti *Filozofskog fakulteta* na kojemu dio studenata ima matematičke kolegija, a ostali ne, kako bi se ispitalo i postoji li razlika među njima u uspješnosti rješavanja.

U jednome dijelu druge grupe ponuđen je i papirnati model slagalice kako bi se ispitalo postoji li razlika u uspješnosti rješavanja danog problema bez modela i s pripadajućim modelom.

5.4. Prikupljanje podataka

Prvi dio istraživanja provodio se na samom kraju nastavne godine 2020./2021. na *Preddiplomskom sveučilišnom studiju Matematika Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu* kao dio pripreme i prikupljanja podataka za pisanje ovoga rada uz istovremeni rad na pisanju članka *Dudeneyjev Haberdasherov problem* (Grubić i Baranović, 2021) objavljenog u četvrtom izdanju specijaliziranog stručno-metodičkog časopisa *Acta mathematica Spalatensia. Series didactica* (2021) koji izlazi u izdanju *Odjela za matematiku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu* i *Splitskog matematičkog društva* (Hrčak, 2021).

Drugi dio istraživanja proveden je na samom kraju nastavne godine 2021./2022. na *Filozofskome fakultetu u Splitu*.

Sudionici su ponuđene varijante zadataka rješavali tijekom redovne nastave u dogovoru s predmetnim nastavnikom, a na raspolaganju su imali 20 minuta. Prije pisanja sudionici nisu imali nikakve pripreme, a pisali su svi oni koji su u trenutku istraživanja bili na nastavnome satu. Svaka grupa pisala je jednu od ponuđenih varijanti zadataka uz iznimku dijela druge grupe koja je rješavala problem s modelom i bez njega.

5.5. Analiza podataka

Radovi sudionika obrađeni su uzajamno deskriptivnom metodom i kvalitativnom analizom procesa rješavanja problema.

Za prve dvije varijante zadatka analizirao se proces utvrđivanja istinitosti odgovarajuće tvrdnje kroz četiri faze:

1. razlikovanje zadanih elemenata: *pretpostavke* (P) i *zaključka* (Q) kojeg treba izvesti, a zatim i otkrivanje elemenata potrebnih za izvođenje traženog zaključka (kraće *Razumijevanje*)
2. osmišljavanje „grubog“ plana dokazivanja koji se ne mora nužno navesti, ali se iz samog zapisa sudionika vidi je li jasno na koji način od pretpostavke (P) doći do zaključka (Q) ili ne (kraće *Plan*)

3. izvođenje logičkog slijeda definicija, aksioma i teorema u svrhu utvrđivanja istinitosti tvrdnje $P \Rightarrow Q$ (kreće *Realizacija*)
4. osvrt na provedeno što uključuje i zaključak o istinitosti tvrdnje $P \Rightarrow Q$ (kraće *Osvrt*).

Unutar svake od navedenih faza korištena su tri kriterija uspješnosti rješavanja: sve točno navedeno (T), navedeno s određenim manjkavostima ili pogreškama (F) i bez ikakvog zapisa (O). U skladu s opisnim kriterijem izveden je deskriptivni opis uspješnosti rješavanja.

U trećoj varijanti zadatka sudionici su svoje rješenje slaganja modela rasklopive igračke u mislima trebali vizualno prikazati, a zatim prikazane likove opisati. Većina sudionika nije dala opis prikazanih likova, a oni koji su dali najčešće su samo naveli da se radi o trokutu, kvadratu, pravokutniku, trapezu, dijamantu i slično. Stoga su radovi sudionika vrednovani samo prema vizualnom prikazu: korektno prikazano (T), nedovršeno ili nekorektno (F) te bez ikakvoga prikaza (O). Vrednovanje je vršeno za svaki lik posebno (trokut, kvadrat, trapez) na temelju čega je vršen sumativni deskriptivni opis prema različitim karakteristikama kao i daljnja kvalitativna analiza.

5.6. Rezultati i rasprava

Zadatak 1 rješavalo je 9 studenata druge godine studijskog programa *Matematika – smjer računarski* (Grupa 1A), a drugu varijantu zadatka rješavalo je 12 studenata prve godine studijskih programa *Matematika i Informatika* te *Matematika i Fizika*, 7 studenata prve godine studijskog programa *Matematika – smjer matematički* i 13 studenata treće godine studijskog programa *Matematika – smjer matematički*. S obzirom na to da među njihovim rezultatima nema značajnije razlike u uspješnosti rješavanja, njihovi rezultati razmatraju se svi zajedno (Grupa 1B).

U *tablici 1* prikazani su rezultati uspješnosti rješavanja *zadatka 1* sudionika *grupe 1A* prema četiri opisane faze procesa dokazivanja: razumijevanje, plan, realizacija i osvrt.

Tablica 1. Uspješnost rješavanja *Zadatka 1*

Grupa 1A	Razumijevanje		Plan		Realizacija		Osvrt	
N = 9	N	%	N	%	N	%	N	%
T	1	11,11	1	11,11	0	0,00	3	33,33
F	0	0,00	8	88,89	9	100,00	3	33,33
O	8	88,89	0	0,00	0	0,00	3	33,33

T – sve točno navedeno, F – navedeno s određenim manjkavostima ili pogreškama, O – bez ikakvoga zapisa

Na temelju podataka prikazanih u *tablici 1* vidljivo je da je samo jedan sudionik istaknuo što treba dokazati, a iz njegova zapisa uočava se i jasan plan dokaza. Svi su ostali sudionici proces dokazivanja započeli bez jasnog razlučivanja *kako dokazati da je promatrani četverokut kvadrat*, a kroz njihov zapis vidljivo je da im ni plan provođenja dokaza nije u potpunosti jasan (8 od 9; 88,89 %). Iako je u koloni *Osvrt* istaknuto da su tri sudionika izvela korektan zaključak o istinitosti tvrdnje, to jest da četverokut nije kvadrat, taj se zaključak nije temeljio na korektnome procesu pa se ne može razmatrati kao korektan zaključak. Pored njih, tri su sudionika izvela pogrešan zaključak da je na slici predstavljen kvadrat čemu je također prethodio pogrešan ili nepotpun proces. Konačno, tri sudionika proces uopće nisu dovela do kraja pa je njihov zaključak izostao.

Kvalitativnom analizom zapisa procesa dokazivanja sudionika *grupe 1* uočava se njihova opća karakteristika: gotovo svi započinju bez jasne ideje što treba dokazati, to jest na temelju čega izvesti zaključak (Q) je li promatrani četverokut kvadrat ili ne. Konkretno, u ovom slučaju trebalo je osvijestiti i provjeriti jesu li svi kutovi četverokuta *LRST* pravi i jesu li sve stranice jednakih duljina. Sasvim prirodno je da ni konkretan proces dokazivanja ne može biti u potpunosti izveden bez jasne ideje i plana dokazivanja, što potvrđuju i rezultati predstavljeni u *tablici 1*. Ukratko, svi su sudionici rješavali problem i to prilično predano, ali nitko u potpunosti uspješno.

U drugom dijelu zadatka trebalo je opisati proces konstruiranja uz zadanu duljinu stranice trokuta, što je prikazalo samo troje od devet sudionika (33,33 %), ali prilično neuspješno. Naime, iz njihova opisa vidljivo je da ne razlikuju pojmove crtanja i konstruiranja te da nije jasan proces razlaganja složene konstrukcije na osnovne i elementarne konstrukcije, koje se pritom koriste pri opisu koraka konstruiranja zadane figure.

U *tablici 2* prikazani su rezultati uspješnosti rješavanja *zadatka 2* sudionika *grupe 1B* također kroz četiri faze procesa obrazlaganja, slično kao i kod *zadatka 1*.

Tablica 2. Uspješnost rješavanja *Zadatka 2*

Grupa 1B	Razumijevanje		Plan		Realizacija		Osvrt	
N = 32	N	%	N	%	N	%	N	%
T	5	15,63	1	3,13	0	0,00	1	3,13
F	0	0,00	13	40,63	30	93,75	14	43,75
O	27	84,38	18	56,25	2	6,25	17	53,13
SUM	32	100,00	32	100,00	32	100,00	32	100,00

T – sve točno navedeno, F – navedeno s određenim manjkavostima ili pogreškama, O – bez ikakvoga zapisa

Na početku istraživanja očekivalo se da će pojednostavljeni problem, sa zadanom duljinom stranice koja usmjerava na izračunavanje konkretnih vrijednosti, biti uspješnije riješen, ali rezultati predstavljeni u *tablici 2* tome ne idu u prilog.

Iako je petero sudionika (5 od 32; 15,63 %) navelo oba uvjeta (pravi kutovi i jednakost duljina stranica) koja treba provjeriti za utvrđivanje je li promatrani četverokut kvadrat, a samo jedan imao jasan plan kako to izvesti, nitko od njih nije u potpunosti dao valjanu argumentaciju. Sudionik koji je izveo korektan zaključak da promatrani četverokut nije kvadrat, svoju je tvrdnju temeljio na pogrešnom procesu zaključivanja pa se ni taj zaključak ne može uzeti kao korektan.

Tako, bez jasnog plana, ni sudionici ove grupe nisu mogli izvesti potpuno obrazloženje. Naime, dio njih uspješno je zaključio da četverokut ima sva četiri prava kuta, ali jedni su proces dokazivanja time završili, dok oni drugi bez jasnog plana proces obrazlaganja (dokazivanja) nisu bili u mogućnosti uspješno dovršiti. Zapravo, oni koji su provjeravali jednakost duljina stranica četverokuta nisu bili u mogućnosti povezati valjane elemente u logičan slijed zaključaka na temelju kojeg bi izveli zaključak da se radi o pravokutniku, a ne o kvadratu. Jedini sudionik koji je imao jasan plan i koji je proces rješavanja temeljio na određivanju duljina stranica promatranog četverokuta, izveo je pogrešan zaključak jer je za neke duljine dobio nekorektne vrijednosti.

Među sudionicima različitih studijskih godina nije bilo razlike u uspješnosti rješavanja, osim što su se sudionici viših studijskih godina kvalitetnije i preciznije matematički izražavali. Tako se kod sudionika prve studijske godine uočavaju brojne elementarne pogreške u zapisivanju: imenovanje četverokuta i odgovarajućih kutova, razlikovanje dužine i njezine duljina, brkanje pojmova sukladnosti i sličnosti trokuta i tako dalje, što je tek u manjoj mjeri prisutno kod sudionika viših studijskih godina.

Na temelju svih predstavljenih rezultata sudionika prve grupe (*grupa 1A* i *grupa 1B*) može se zaključiti da sudionici istraživanja nemaju razvijenu strategiju sustavnog procesa obrazlaganja i dokazivanja kroz četiri opisane faze.

U *tablici 3* dani su sumativni rezultati za sudionike *grupe 2* za sve studijske godine kako bi se usporedila uspješnost slaganja likova i to za svaki lik posebno (trokut, kvadrat, trapez), a kroz kvalitativnu analizu opisuju se specifičnosti slaganja sudionika pojedine studijske godine.

Tablica 3. Uspješnost rješavanja *Zadatka 3* sudionika *grupe 2*

Grupa 2	Lik iz rasklopne igračke					
	Trokut		Kvadrat		Trapez	
	N	%	N	%	N	%
T	6	5,17	23	19,83	4	3,45
F	44	37,93	39	33,62	16	13,79
O	66	56,90	54	46,55	96	82,76
SUM	116	100,00	116	100,00	116	100,00

T – korektno prikazano, F – nedovršeno ili nekorektno, O – bez ikakvoga prikaza

Prema rezultatima prikazanima u *tablici 3* može se uočiti da su se sudionici najviše bavili slaganjem kvadrata (62 od 116; 53,45 %), a najmanje slaganjem trapeza (20 od 116; 17,24 %) što je rezultiralo najvećom uspješnošću pri slaganju kvadrata (23 od 116; 19,83 %), zatim trokuta (6 od 116; 5,17 %) te najmanjom u otkrivanju i slaganju trapeza (4 od 116; 3,45 %). Moguće je da su se najviše bavili kvadratom, kojemu su sva četiri kuta prava, zbog pravih kutova istaknutih na slici što su neki sudionici i zapisali.

Uvidom u detaljniju analizu sudionika po studijskim godinama mogu se uočiti suptilnije razlike među njima. Tako su sudionici prve godine bili značajno slabiji u odnosu na sudionike ostalih godina, moguće jer oni na prvoj studijskoj godini nemaju niti jedan matematički kolegij, dok ostali imaju. Iako su sudionici prve godine predano radili na rješavanju problem, što se moglo uočiti promatranjem sudionika za vrijeme istraživanja, nitko od njih nije uspješno vizualno prikazao rješenje ni za jedan lik, a lik trapeza nitko od njih nije ni uočio kao moguće rješenje. Većina onih koji su crtali rješenje prikazali su samo konturu konačnog lika kojeg su zamišljali kao konačno rješenje, ali ne i dijelove od kojih je taj lik složen. Tako je na slaganju trokuta radilo nešto manje od 30 % sudionika (10 od 35; 28,57 %), a na slaganju kvadrata nešto više od 50 % sudionika (18 od 35; 51,43 %) pri čemu je petina sudionika (7 od 35; 20 %) uočila mogućnost slaganja i trokuta i kvadrata. Prilično visok postotak nije dao nikakav odgovor (14 od 35; 40 %) pa su kod njih izostala i polovična rješenja koja su mogla ukazati na smjer slaganja.

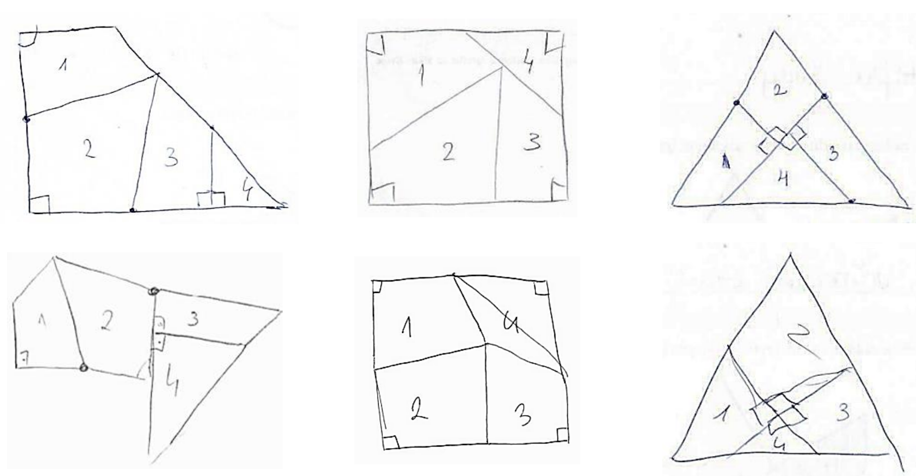
Za razliku od visokog postotka bez odgovora kod sudionika prve godine, na višim godinama taj je postotak daleko manji: na drugoj godini 18,75 % (3 od 16), na trećoj godini nitko, na četvrtoj godini 16,68 % (3 od 18) i na petoj godini 11,54 % (3 od 26). No, i oni koji nisu ništa prikazali dijelom su to napravili iz opreza, jer kako kažu *ako nisu sigurni radije neće prikazati ništa nego bilo što*, a neki su napisali kako *trenutno nemaju inspiracije*.

Jedino su sudionici druge godine korektno prikazali trapez (4 od 16; 25 %), koji se pokazao kao samo jedan dodatan korak u odnosu na slaganje kvadrata, moguće jer su oni zadatak rješavali neposredno nakon učenja geometrije ravnine. Za razliku od njih, na višim godinama bilo je pokušaja slaganja trapeza, ali nijedan vizualni prikaz nije bio korektan: na trećoj godini 19,05 % (4 od 21), na četvrtoj godini 27,78 % (5 od 18) i na petoj godini 19,23 % (5 od 26).

Sudionici treće godine najviše su se bavili slaganjem trokuta (14 od 21; 66,67 %), ali su imali raznih teškoća u vizualnom prikazu. Naime, samo dvoje sudionika (2 od 21; 9,52 %) korektno je vizualno prikazalo trokut (*slika 17A*), dok ih je devetero (9 od 21; 42,86 %) pri crtanju rješenja za trokut previdjelo da se vrhovi pravih kutova ne sastaju u jednoj točki (*slika 17B*), a kod ostalih slike su bile nedovršene. S obzirom na to da su se sudionici treće godine dosta vremena bavili slaganjem trokuta, imali su najmanje korektnih rješenja u slaganju kvadrata u odnosu na ostale: od sedam (7 od 21; 33,33 %) sudionika koji su crtali rješenje za kvadrat, samo ih je dvoje korektno dovršilo (*slika 17A*).

A

B



Slika 17. Korektni (A) i nekorektni (B) vizualni prikazi sudionika

Sudionici četvrte godine uglavnom su se bavili slaganjem u jedan lik i njegovim vizualnim prikazom. Najuspješniji su bili u slaganju kvadrata (13 od 18; 72,22 %) pri čemu su trojica bila neprecizna u crtanju, dok je preostalih desetero korektno prikazalo rješenje. Za razliku od ostalih, većina sudionika četvrte godine u svom prikazu nije isticala pravi kut, a iz opisa riječima može se uočiti što je usmjeravalo njihov proces slaganja. Samo petero njih (5 od 18; 27,78 %) složilo je dva lika: dvoje trokut i kvadrat, dvoje kvadrat i trapez te jedan trokut i trapez.

Sudionici pete godine najviše su se bavili slaganjem trokuta (17 od 26; 65,38 %), ali samo je troje njih korektno vizualno prikazalo rješenje, osmero ih je unutar trokuta prave kutove prikazalo sa zajedničkim vrhom (*slika 17B*), dok su ostali pokušaji vizualnih prikaza rješenja ostali nedovršeni. Kvadratom se bavilo nešto manje sudionika nego trokutom (14 od 26; 53,85 %) od kojih je točno polovica imala korektan vizualni prikaz, dok su kod ostalih prikazi bili prilično neprecizni. Trojica sudionika pete godine (3 od 26; 11,54 %) pri slaganju likova u mislima prepoznala su sva tri moguća rješenja, koja su i vizualno prikazali, ali ne sasvim uspješno kod svih likova; osmero sudionika (8 od 26; 30,77 %) bavilo se s dva lika (kvadrat i trokut) među kojima su samo trojica korektno dala vizualni prikaz; svi su ostali bili usmjereni samo na jedan lik. Konačno, analizom dobivenih rezultata sudionika pete godine može se uočiti da su bili uspješniji u slaganju kvadrata iako su se više bavili slaganjem trokuta.

Ukratko, na temelju svih prikazanih rezultata može se zaključiti da sudionici druge grupe nemaju dovoljno razvijene vizualno-prostorne sposobnosti kao ni vještine crtanja. Najuspješniji su bili u prikazivanju kvadrata iako su se dosta bavili prikazom trokuta, a najveći problem se pokazao u zamišljanju i prikazivanju trapeza. Veliki dio sudionika svoje je zapise brisao zbog nesigurnosti u korektnost prikazanog.

S obzirom na to da nitko od sudionika prve studijske godine nije korektno prikazao rješenje problema prilikom čega je većina zadatak ostavila bez ikakvog rješenja, *zadatak* 3 dan im je ponovo na rješavanje uz model napravljen od papira. U *tablici 4* prikazuju se usporedni podatci uspješnosti slaganja likova u *zadatku 3* za sudionike prve studijske godine *Učiteljskoga studija* (*Grupa 2A*) bez modela i s modelom kako bi se vidjelo u kojoj mjeri didaktičko sredstvo pomaže u rješavanju danog problema.

Tablica 4. Uspješnost rješavanja *Zadatka 3* sudionika *grupe 2A*

Grupa 2A	Bez modela						S modelom					
	Trokut		Kvadrat		Trapez		Trokut		Kvadrat		Trapez	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
T	0	0,00	0	0,00	0	0,00	5	14,29	25	71,43	4	11,43
F	10	28,57	18	51,43	0	0,00	15	42,86	3	8,57	1	2,86
O	25	71,43	17	48,57	35	100,00	15	42,86	7	20,00	30	85,71
SUM	35	100,00	35	100,00	35	100,00	35	100,00	35	100,00	35	100,00

T – korektno prikazano, F – nedovršeno ili nekorektno, O – bez ikakvoga prikaza

Prema podatcima prikazanima u *tablici* 4 vidljiva je prilično veća uspješnost slaganja zadanih likova uz korištenje papirnatog modela: trokut je uspješno složilo više od 50 % sudionika (20 od 35; 57,14 %), kvadrat je uspješno složilo 80 % sudionika (28 od 35), a trapez 14,29 % (5 od 35). Međutim mnogi od njih imali su teškoća u vizualnom prikazu: petero sudionika korektno je prikazalo trokut, dok je kod ostalih vizualni prikaz trokuta bio nekorektan jer su previdjeli da se vrhovi pravih kutova ne sastaju u jednoj točki (*slika 17B*) ili vizualni prikaz nisu dovršili. Od onih koji su složili kvadrat većina ga je korektno vizualno prikazala (25 od 35; 71,43 %), dok ih samo trojica nisu vodila računa o preciznosti prikaza. Četiri sudionika složila su sva tri oblika (trokut, kvadrat i trapez), ali su imala problema s vizualnim prikazivanjem kako je već opisano u prethodnom dijelu. U potpunosti korektno slaganje i crtanje dvaju likova imalo je osam sudionika: petero za trokut i kvadrat, a troje za kvadrat i trapez. Ipak, bilo je onih koji su nacrtali samo konture likova (6 od 35; 17,14 %).

Ukratko, papirnati model sudionicima je omogućio slaganje likova daleko više nego samo u mislima, ali slabije vještine crtanja onemogućile su ih u korektnom prikazu dobivenih rješenja. Također, najuspješniji su bili u slaganju kvadrata i s modelom i bez modela, moguće jer su ih četiri prava kuta na slici usmjerila na slaganje četverokuta s četiri prava kuta. Međutim, kako su stranice vizualno izgledale jednake, većina je zaključila da se radi o kvadratu, a tek manji dio njih naveo je da se radi o pravokutniku.

Kako bi se ispitalo utječe li učenje matematike na ishode slaganja ponuđenog modela rasklopne igračke, *zadatak 3* ponuđen je studentima *dvopredmetnih studija* koji u svome studijskom programu nemaju matematičkih kolegija. U *tablici 5* prikazani su rezultati sudionika istraživanja *grupe 3*.

Tablica 5. Uspješnost rješavanja *Zadatka 3* sudionika *grupe 3*

Grupa 3	Lik iz rasklopne igračke					
	Trokut		Kvadrat		Trapez	
	N	%	N	%	N	%
T	0	0,00	3	10,71	0	0,00
F	5	17,86	5	17,86	4	14,29
O	23	82,14	20	71,43	24	85,71
SUM	28	100,00	28	100,00	28	100,00

T – korektno prikazano, F – nedovršeno ili nekorektno, O – bez ikakvoga prikaza

Prema podatcima prikazanima u *tablici 5* vidljivo je da su sudionici *grupe 3* bili prilično neuspješni u rješavanju *zadatka 3*. Iako se većina sudionika zaista trudila u procesu rješavanja problema, što se moglo uočiti promatranjem sudionika za vrijeme istraživanja, tek manji dio njih vizualno je prikazao rješenja, a samo troje (3 od 28; 10,71 %) imalo je korektan vizualni prikaz (kvadrat). Nakon provedbe istraživanja, sudionici *grupe 3* komentirali su teškoće u crtanju, a posebno nemogućnost zamišljanja konačnog lika koji se može dobiti slaganjem rasklopne igračke. Konačno, usporedbom rezultata sudionika *grupe 2* i *grupe 3* može se zaključiti da je učenje matematike kroz matematičke kolegije ipak doprinijelo uspješnijem rješavanju postavljenog *Haberdasherova* problema u *zadatku 3*. Drugim riječima, učenje matematike kod sudionika *grupe 2* doprinijelo je razvoju njihovih vizualno-prostornih sposobnosti, kao i razvoju vještina crtanja.

Prema svim predstavljenim rezultatima provedenog istraživanja koje se temeljilo na *Haberdasherovom* problemu, može se zaključiti da je i nakon više od sto godina *Haberdasherov* problem i dalje kognitivno vrlo zahtjevan, ne samo u postavljanju i dokazivanju tvrdnje, već i u slaganju likova korištenjem modela slagalice. Osim toga, rezultati pokazuju da se *Haberdasherov* problem predstavljen kroz opisane zadatke može koristiti kao instrument za ispitivanje procesa argumentiranja, dokazivanja i konstruiranja, ali i vještina slaganja, bilo u mislima ili korištenjem fizičkog modela te vizualnog prikazivanja.

6. Zaključak

U radu je opisan jedan *stari* problem geometrijske disekcije prema kojemu je potrebno jednakostraničan trokut podijeliti na četiri dijela kako bi se od dobivenih dijelova preslagivanjem mogao oblikovati kvadrat i to bez preokretanja istih. Problem je po prvi put predstavljen davne 1902. godine, prije točno 120 godina, i još je uvijek u fokusu razmatranja poseban jer je sam po sebi intrigantan. Svemu tome pridonosi i činjenica da je u ovih 120 godina njegova postojanja još uvijek poznato samo jedno točno rješenje i to ono njegova autora, Henryja Ernesta Dudeneyja.

Brojni su bili pokušaji rješavanja ovog zadivljujućeg problema. Neki od njih, kao što je u radu razmotreno Steinhausovo rješenje, bili su vizualno prilično uvjerljivi da su čak i vrsni matematičari previdjeli njihovu nekorektnost. Pokazano je da je matematički dokaz ipak najuvjerljiviji pokazatelj ispravnosti, odnosno točnosti neke tvrdnje i da se bez provođenja istog ponekad lako prevariti, odnosno zavesti jednostavnošću rješenja nekog određenog problema kao što je ovaj *Haberdasherov*.

Dudeneyjev *Haberdasherov problem* kao problem disekcije geometrijskog lika prvenstveno je osmišljen kao zagonetka i kao takav pripada području rekreacijske matematike. Ciljanim osmišljavanjem aktivnosti može se učinkovito iskoristiti, kako u nastavi geometrije s različitim uzrastima pri čemu doprinosi stvaranju vertikalne povezanosti nastavnih sadržaja, tako i u nastavi informatike za razvoj računalnog razmišljanja, apstrakcije i generalizacije. Važno je poučavanjem preko ovakvih sadržaja učenicima dati priliku za otkrivanjem matematičkih ideja, za argumentiranjem uočenoga te im osigurati okruženje unutar kojeg će u određenom uzrastu razvijati i proces dokazivanja. Mnogo je područja i načina na koje se ovaj fascinantan problem u nastavi može iskoristiti, a na učiteljima i profesorima je da svojom kreativnošću i svojim iskustvom maksimalno iskoriste njegov potencijal (Grubić i Baranović, 2021).

Provedenim istraživanjem pokazano je kako i naizgled jednostavno postavljen problem u kojem se traži korištenje sposobnosti vizualizacije pri rješavanju geometrijskog problema čak i studentima može predstaviti velik izazov i da nije nimalo lako doći do rješenja ako takve sposobnosti prethodno nisu razvijane tijekom nastavnog procesa njihova obrazovanja. Pokazano je i koliko proces dokazivanja može biti težak, čak i za studente kojima je priroda studija matematičkog usmjerenja i da i oni imaju problem pri opisivanju rješenja problema ili konstrukcije zadane figure pa i kada su već upoznati s takvim matematičkim procesima i postupcima.

Sažetak

U interesu za istraživanjem nedovoljno istraženog, pogotovo na području Republike Hrvatske, u radu se iznosi tematika i obrađuje problematika jednog starog, ali još uvijek intrigantnog problema. Točnije, u radu je predstavljen i obrađen Dudeneyjev *Haberdasherov* problem kao problem dijeljenja jednakostraničnog trokuta na najmanji broj dijelova pri čemu se bez preokretanja dijelova slagalice može oblikovati kvadrat. Unatoč nebrojenim pokušajima rješavanja ovog problema tijekom 120 godina njegova postojanja, jedino do sada poznato valjano rješenje rješenje je njegova autora dano davne 1903. godine, godinu dana nakon predstavljanja problema.

U radu se uz opis konstrukcije i opravdanje valjanosti Dudeneyjeva rješenja posebno razmatra i jedno rješenje koje se potkrijepljeno matematičkim dokazom pokazalo pogrešnim te se zapravo radi samo o dobroj aproksimaciji kvadrata. Razmotrena je i klasa rješenja dijeljenja trokuta na dijelove koji se daju oblikovati u pravokutnik među kojima je u jednom posebnom slučaju i kvadrat. Nadalje, navode se razlozi i primjeri zašto su ovakvi i slični problemi korisni i prikladni za korištenje na svim razinama obrazovanja.

Dio rada posvećen je istraživanju temeljenom na *Haberdasherovom* problemu. Iznose se rezultati i detaljna analiza prikupljenih podataka provedenog istraživanja kojim su se ispitivali različiti aspekti *Haberdasherova* problema kao instrumenta. Tijekom istraživanja oblikovane su različite varijante zadatka prilagođene različitim grupama sudionika.

Ključne riječi: *disekcija mnogokuta, geometrijska konstrukcija, geometrijski dokaz, vizualizacija, proces rješavanja problema*

Abstract

In the interest of researching what is insufficiently researched, especially in the territory of the Republic of Croatia, this thesis paper presents and deals with the issue of an old but still intriguing problem. More precisely, in the thesis Dudeney's *Haberdasher's* problem is presented and processed as a problem of dividing an equilateral triangle into the smallest number of parts, whereby a square can be formed without turning over the pieces of the puzzle. Despite countless attempts to solve this problem during the 120 years of its existence, the only valid solution known so far is the solution given by its author back in 1903, one year after the problem was presented.

In addition to the description of the construction and the justification of the validity of Dudeney's solution, the thesis paper also considers one solution which, supported by a mathematical proof, turned out to be wrong, and in fact it is only a good approximation of the square. A class of solutions for dividing a triangle into parts that can be shaped into a rectangle, including a square in one special case, was also considered. Furthermore, there are reasons and examples given for why these and similar problems are practical and suitable for use at all levels of education.

Part of this thesis paper is devoted to research based on *Haberdasher's* problem. The conducted research examined different aspects of *Haberdasher's* problem as an instrument. The results and detailed analysis of the collected data are presented by different variants of the task that was adapted to separate groups of participants.

Keywords: *polygon dissection, geometric construction, geometric proof, visualization, problem solving process*

7. Literatura i izvori

Bruce, C., Hawes, Z. (2014). *The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children? What is it? Why is it important? And what can we do about it?* ZDM: The international journal on mathematics education. doi: 10.1007/s11858-014-0637-4.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Metode istraživanja u obrazovanju*. NAKLADA SLAP.

Dakić, B. (2018). *Matematika u boji. Dokazi bez riječi*. Zagreb: ELEMENT.

Dudeney, H. E. (1919). *The Canterbury Puzzles and other curious problems.* London, Edinburgh i New York: Thomas Nelson and sons, Ltd. https://z-lib.org/. Pristupljeno: 8.3.2021.

Frederickson, G. N. (2002). *Hinged Dissections: Swinging and Twisting*. Cambridge: Cambridge University Press, str. 1, 131-133. https://z-lib.org/. Pristupljeno: 8.3.2021.

Grubić, M., Baranović, N. (2021). Dudeneyjev Haberdasherov problem. *Acta mathematica Spalatensia. Series didactica, 4(4)*, 73-87. doi: https://doi.org/10.32817/amssd.4.4.5.

Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond.* Berkeley: University of California.

Hrčak – Portal hrvatskih znanstvenih i stručnih časopisa (2021). *Acta mathematica Spalatensia. Series didactica.* https://hrcak.srce.hr/amasd. Pristupljeno: 25.8.2022.

Kavajin, A., Barnaović, N. (2019). *Tangram u nastavi matematike, 2. dio*. *21(102)*, 69–74. Matematika i škola.

Mathshistory. Obituary in *The Times* (1930). https://bit.ly/3bkHnCK. Pristupljeno: 7.3.2021.

O'Connor, J. J., Robertson, E. F. (2003a). *Henry Ernest Dudeney*. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dudeney/. Pristupljeno: 7.3.2021.

O'Connor, J. J., Robertson, E. F. (2003b). *Henry Ernest Dudeney*. https://mathforums.com/education/henry-dudeney. Pristupljeno: 14.5.2021.

Pérez Arribas, F. (2012). *Juegos Matemáticos. Triángulos cuadrados y cruces cuadradas: algunos puzzles geométricos de H. E. Dudeney*. Izvještaj. Universidad Politécnica de Madrid.

Steinhaus, H. (1983). *Mathematical Snapshots*. New York: Oxford University Press. https://z-lib.org/. Pristupljeno: 27.3.2021.

Suradnici u učenju (2022). *Dabar je više od natjecanja, Dabar je izazov!* https://ucitelji.hr/dabar/. Pristupljeno: 30.8.2022.

Wells, D. (1991). *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry.* London: Penguin Books, str. 61-62. https://z-lib.org/. Pristupljeno: 4.5.2021.

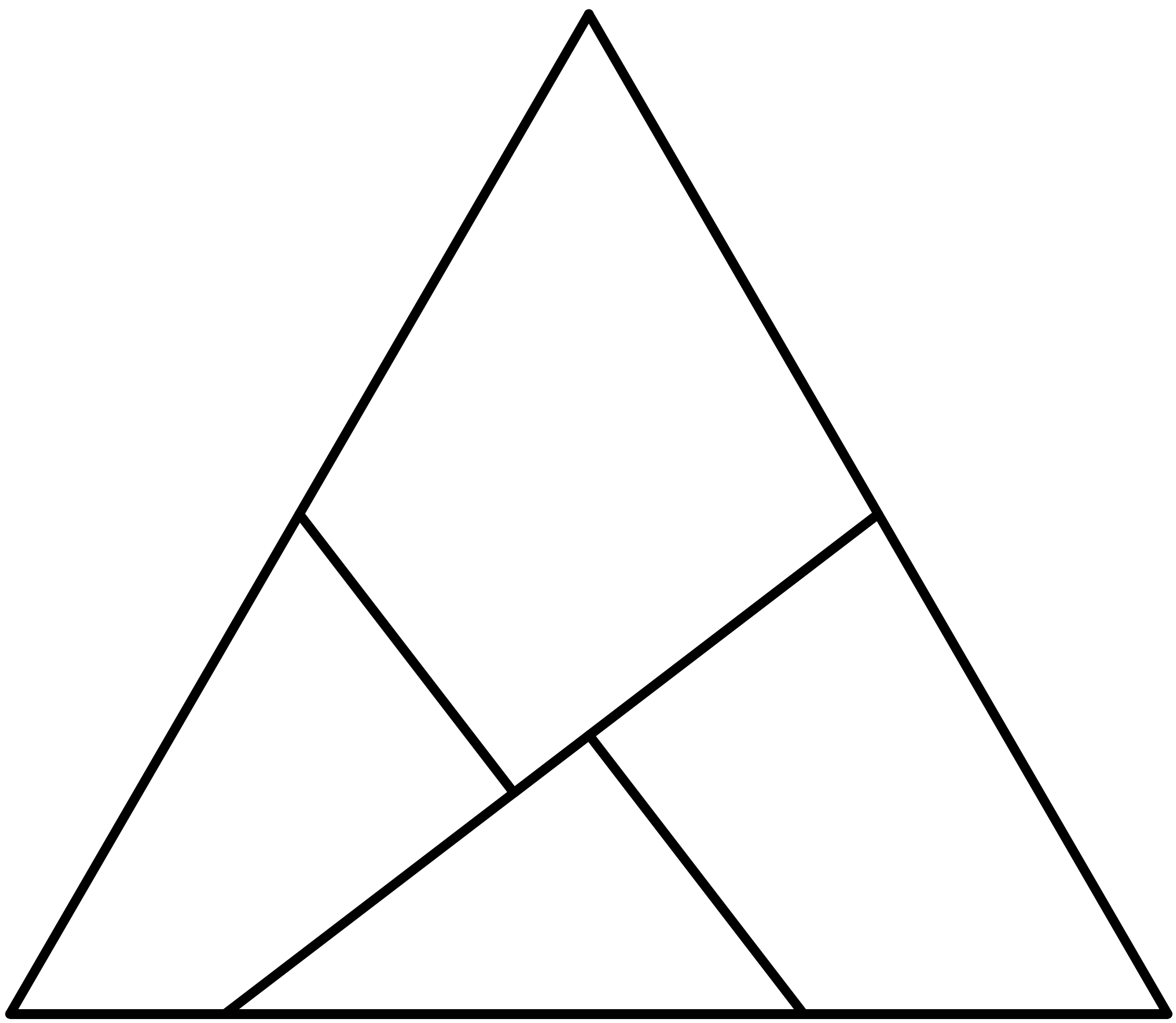
Wikipedia. (2021). *Hinged dissection.* https://bit.ly/3xwQ9XF. Pristupljeno: 8.3.2021.

8. Popis tablica

9. Popis ilustracija

Prilozi

Prilog 1: Predložak za slagalicu prema Dudeneyjevom rješenju



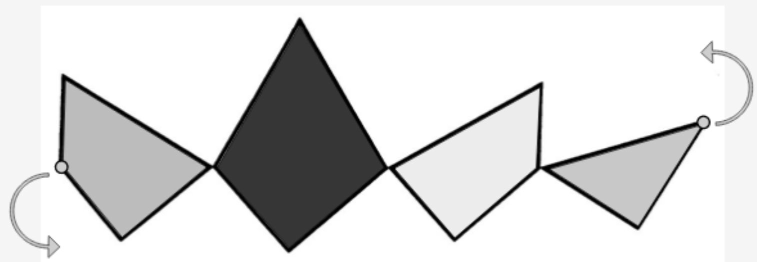
Prilog 2. Prijedlog zadatka za međunarodnu bazu *Dabar* natjecanja, za 2022. godinu

2022-HR-04-Assemble – Disassemble

6yo–8yo: –	*8yo–10yo:* –	*10yo–12yo:* –	*12yo–14yo:* –	*14yo–16yo:* hard	*16yo–19yo:* medium
Answer Type: Multiple-Choice (☐ keep order of multiple-choice/-select)					
Computational Thinking Skills: ☑ abstraction ☐ algorithmic thinking ☐ decomposition ☑ evaluation ☐ pattern recognition			*Computer Science Area:* ☐ algorithms and programming ☐ communication and networking ☐ computer processes and hardware ☑ data structures and representations ☑ interactions, systems and society		

Body

Beaver Darko was given the task to make a wooden folding toy according to the model shown in the picture.



The toy to be made consists of four geometric shapes interconnected for the vertices exactly as the picture shows. In places where these characters meet, the beaver Darko should install hinges that allow all parts of the toy to rotate in both directions (both clockwise and counter-clockwise).

A wooden folding toy forms a certain geometric shape in both cases by assembling its parts into one whole, either clockwise or counterclockwise until one green dot touches the other one.

Question / Challenge

Which two geometric shapes will the beaver Darko be able to assemble by rotating the parts of his wooden toy in both directions (each direction forms exactly one geometric shape)?

Answer Options / Interactivity Description

A) isosceles triangle and square

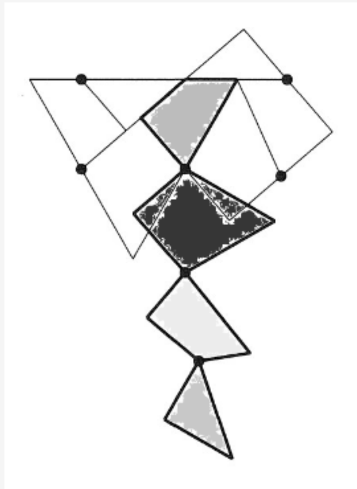
B) equilateral triangle and rhombus

C) scalene triangle and rectangle

D) equilateral triangle and square

Answer Explanation

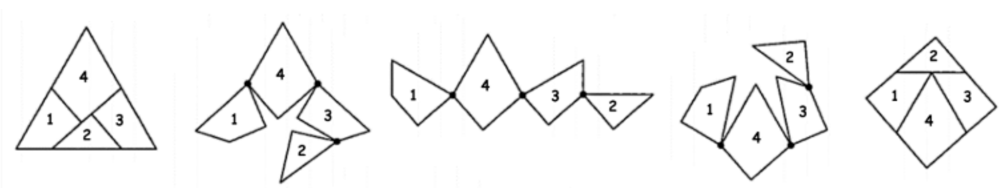
The correct answer is *D) equilateral triangle and square*.



A solution in which the correct answer would be an equilateral triangle and a rhombus can be immediately singled out as wrong because by rotating the model counterclockwise, pulling the right side of the model to the left as shown in the previous picture, we get a quadrilateral in whose vertices all angles are right which excludes the rhombus as a possible solution. Thus, the resulting quadrilateral is either a rectangle or a square.

Furthermore, the sides of the pink and yellow quadrilaterals that lean against the red quadrilateral during the previously described assembly are of the same length as the corresponding sides of the red quadrilateral on which they lean. It can be seen from the model that they are also of equal length, which means that the triangle they form by rotating clockwise by pulling the right side of the model is either isosceles or equilateral, which excludes the solution of a scalene triangle and rectangle. So, according to the other answers offered, we know that the quadrilateral created by the rotation of this model is a square.

It remains to show whether the triangle formed by the model in the opposite direction is isosceles or equilateral. Consider the following model rotation image:



We can observe that by assembling the model into the shape of a square, the angles at the vertices of the three quadrilaterals that connect at the same point form a straight angle, i.e. an angle of 180 degrees. We know that the above angles of quadrilaterals 1 and 3 rotate in the opposite direction to form angles in the vertices at the base of an isosceles or equilateral triangle, so it follows that they are equal in size. It can be seen from the model image that these angles are not only equal but also equal to the angle of quadrilateral 4 with which they merge into the previously mentioned straight angle, which is also the angle in the third vertex of the triangle obtained by assembling the model into a geometric triangle shape. It follows that the resulting triangle is equilateral, so the correct answer is an equilateral triangle and a square.

It's Informatics

Solving the task required the ability of abstraction or generalization as a special form of abstraction, which in such cases is used to mark the process of identifying parts of the whole as a whole. The parts, which may be unrelated if left alone, may come together as a group, thus belonging to the whole by establishing a common relationship between them. However, the parts cannot be generalized as a whole until all the parts have a common relationship between them. This does not mean that the parts are unrelated, but that a common relationship for generalization has not yet been established.

This method of generalization is also used in solving geometric dissections, from which the task singles out a specific case of geometric dissection of an equilateral triangle into the smallest number of parts that can be folded into a square without inversion. So far, only one possible solution to this problem is known, and it was offered by its creator, Henry Ernst Dudeney. He called his problem *The Haberdasher's Puzzle*.

Keywords and Websites

Abstraction – generalization, information visualization, geometric dissection.

https://en.wikipedia.org/wiki/Abstraction_(computer_science)

https://en.wikipedia.org/wiki/Information_visualization

https://www.bib.irb.hr/1138189

Wording and Phrases

Geometric shapes: the forms of objects which have boundary lines, angles and surfaces, e.g. isosceles triangle, equilateral triangle, scalene triangle, square, rectangle, rhombus.

Vertex: each angular point of a polygon, polyhedron, or other figure.

Hinge: a movable joint or mechanism on which a door, gate, or lid swings as it opens and closes or which connects linked objects.

Clockwise: in the direction that the hands of a clock move.

Counterclockwise: in a direction opposite to the direction in which the hands of a clock move.

Comments

Author, e-mail, date (YYYY-MM-DD): *Comment*.

Graphics and Other Files

`2022-HR-04-eng.odt` This file.

picture1.odg, created and edited with *Sketchpad* and *Inkscape* programs

picture2.odg, created and edited with *Sketchpad* and *Inkscape* programs picture3.odg, taken from self-made article; https://www.bib.irb.hr/1138189

Authors, Contributors, and Editors (incl. Graphics)

Milka Grubić, milka.grubic@gmail.com, Croatia

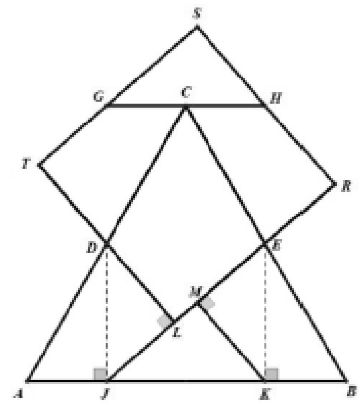
License

Prilog 3. *Zadatak 1*

Zadatak:

Zadan je jednakostraničan trokut ΔABC. Točke D i E polovišta su stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, a točke J i K nožišta okomica iz točaka D i E na stranici $\overline{AB}$, redom.

Okomicama DL i KM na pravac JE, trokut ΔABC podijeljen je na četiri dijela. Zatim su ta četiri dijela presložena u četverokut $LRST$ kako je prikazano na slici.



(a) Na temelju dane slike utvrdite je li četverokut $LRST$ kvadrat. Svoj odgovor potkrijepite matematičkim dokazom.

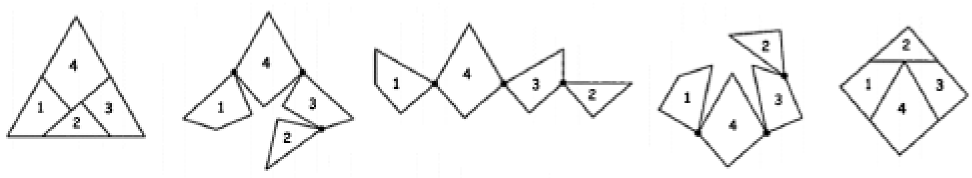
(b) Opišite kako bi konstruirali danu sliku za $|AB| = 8cm$.

Smjer: ______________________________ Godina 1 □ 2 □ 3 □

Prilog 4. *Zadatak 2*

Problem

Jednakostranični trokut treba razrezati na četiri dijela tako da se njihovim preslagivanjem oblikuje kvadrat. Jedno rješenje prikazano je na slici.

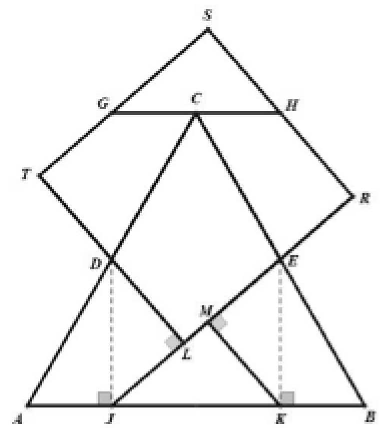


Zadatak

Zadan je jednakostraničan trokut ΔABC stranice duljine $a = 8cm$.

Točke D i E polovišta su stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Točke J i K nožišta su okomica iz točaka D i E na stranicu $\overline{AB}$ redom, a točke L i M nožišta okomica iz točaka D i K na stranicu $\overline{JE}$ redom.

Na taj je način trokut ΔABC podijeljen na četiri dijela, a njihovim preslagivanjem nastao je četverokut $LRST$ kao na slici.



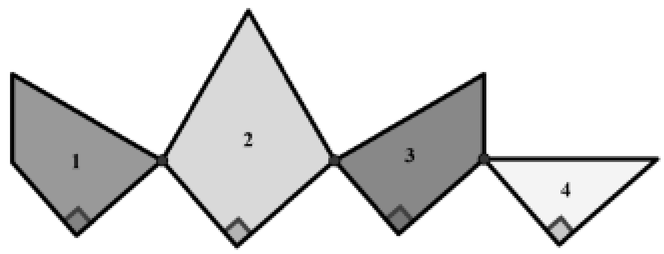
Je li tako nastali četverokut $LRST$ kvadrat?
Svoj odgovor obrazložite.

Smjer: ______________________________ Godina 1 □ 2 □ 3 □

Prilog 5. *Zadatak 3*

Problem

Stolar Marko dobio je zadatak izraditi drvenu rasklopnu igračku prema sljedećem modelu:



Igračka se sastoji od četiri geometrijska lika, koji su spojeni u vrhovima kao na slici. Na mjestima gdje su spojena dva vrha, stolar Marko treba postaviti sklopni zglob tako da se dijelovi igračke mogu rotirati u dva smjera: u smjeru kretanja kazaljke na satu i smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu.

Cilj je da se sklapanjem dijelova rasklopne igračke u jednu cjelinu, bez preklapanja i bez praznina, mogu oblikovati različiti geometrijski likovi.

Zadatak

Odredite koji se sve geometrijski likovi mogu oblikovati rotiranjem dijelova rasklopne igračke sa slike. Svoje rješenje prikažite skicama te opišite nastale geometrijske likove.

Studijska grupa: ______________________________ Godina: 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □

Obrazac A.Č.

SVEUČILIŠTE U SPLITU

FILOZOFSKI FAKULTET

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

kojom ja Milka Grubić, kao pristupnik/pristupnica za stjecanje zvanja magistrice primarnoga obrazovanja s pojačanim modulom informacijsko-komunikacijske tehnologije u učenju i poučavanju, izjavljujem da je ovaj završni/diplomski rad rezultat isključivo mojega rada, da se temelji na mojim istraživanjima i oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i literatura. Izjavljujem da ni jedan dio završnoga/diplomskoga rada nije napisan na nedopušten način, odnosno da nije prepisan iz necitiranoga rada, stoga ne krši ničija autorska prava. Također izjavljujem da nijedan dio ovoga završnoga/diplomskoga rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Split, 3. studenog 2022.

Potpis

OBRAZAC I.P.

IZJAVA O POHRANI ZAVRŠNOG/DIPLOMSKOGA RADA U DIGITALNI REPOZITORIJ FILOZOFSKOGA FAKULTETA U SPLITU

Student/ica:	Milka Grubić
Naslov rada:	Dudeneyjev *Haberdasherov* problem
Znanstveno područje:	Matematika
Znanstveno polje:	Obrazovne znanosti
Vrsta rada:	Diplomski rad

Mentor/Mentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): dr. sc. Nives Baranović, v. pred.

Komentor/Komentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): /

Članovi Povjerenstva (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime):

1. doc. dr. sc. Lada Maleš, predsjednica
2. dr. sc. Nives Baranović, v. pred., član
3. Željka Zorić, v. pred., član

Ovom izjavom potvrđujem da sam autor/autorica predanoga završnoga/diplomskoga rada (zaokružite odgovarajuće) i da sadržaj njegove elektroničke inačice potpuno odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada. Slažem se da taj rad, koji će biti trajno pohranjen u Digitalnom repozitoriju Filozofskoga fakulteta Sveučilišta u Splitu i javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama *Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju*, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15, 131/17), bude:

a) u otvorenom pristupu

b) dostupan studentima i djelatnicima FFST-a

c) dostupan široj javnosti, ali nakon proteka 6 mjeseci / 12 mjeseci / 24 mjeseca (zaokružite odgovarajući broj mjeseci).

(zaokružite odgovarajuće)

U slučaju potrebe (dodatnoga) ograničavanja pristupa Vašemu ocjenskomu radu, podnosi se obrazloženi zahtjev nadležnomu tijelu u ustanovi.

Split, 3. studenog 2022.	Grubić
Mjesto, nadnevak	Potpis studenta/ice