POTENCIJAL MATEMATIČKOG ZADATKA

Bracanović, Mari

SVEUČILIŠTE U SPLITU

FILOZOFSKI FAKULTET

DIPLOMSKI RAD

POTENCIJAL MATEMATIČKOG ZADATKA

MARI BRACANOVIĆ

Split, 2023.

Odsjek: Učiteljski studij

Studij: Integrirani preddiplomski i diplomski učiteljski studij

POTENCIJAL MATEMATIČKOG ZADATKA

Studentica:

Mari Bracanović

Mentorica:

dr. sc. Nives Baranović, v. pred.

Split, rujan 2023.

Sadržaj

1. Uvod

Matematički zadatak i njegovo rješavanje važna su sredstva koja dovode do ostvarivanja brojnih ciljeva nastave matematike (Kurnik, 2000). Odabirom dobrih i raznovrsnih matematičkih zadataka, sadržaji učenja mogu se približiti učenicima kroz njihovo osobno iskustvo i aktivnost. Međutim, nastava matematike još uvijek je usmjerena na realizaciju nastavnog plana i programa, odnosno, usmjerena je na to da učenici usvoje što više propisanog nastavnog sadržaja. Naglasak se stavlja na računanje i operiranje te razvoj osnovnih algoritamskih vještina, dok se interpretacija rješenja i usporedba različitih strategija rijetko prakticira. Najčešće nastavnik postavlja zadatak i daje najefikasniju metodu za njegovo rješavanje, a zatim učenici samostalno rješavaju slične zadatke. Primjereni izbor i korištenje raznovrsnih matematičkih zadataka preduvjeti su za kvalitetnu nastavu matematike i dobre rezultate učenika.

Na početku ovoga rada govori se o samom pojmu matematičkog zadatka te različitim poimanja istog dok se u drugom poglavlju opisuju vrste matematičkih zadataka i daje primjer za svaku vrstu posebno. Zadaci su važno sredstvo oblikovanja sustava osnovnih matematičkih znanja, umijeća i navika te doprinose razvoju matematičkih sposobnosti i kreativnog mišljenja. Snalaženje učenika unutar matematičkih situacija opisanih zadatkom i samostalno promišljanje o istima omogućava im razvoj i stjecanje matematičkih kompetencija što je preduvjet za kasniju uspješnu primjenu matematičkih znanja i vještina u životu i profesionalnom radu.

U sljedećem poglavlju razmatraju se pojmovi *rješenje*, *proces rješavanja* i što znači *riješiti* matematički zadatak, a zatim se razmatra proces rješavanja matematičkog zadatka kroz četiri faze: razumijevanje, planiranje, izvršavanje i osvrt.

U posljednjem poglavlju, objedinjuje se sve prethodno izloženo u razmatranju karakteristika odabranih zadataka i njihovog cjelokupnog procesa rješavanja jer *didaktički potencijal matematičkog zadatka* otkriva se tek u cjelovitom radu na zadatku. Konačno, puni didaktički potencijal zadatka dolazi do izražaja tek kada se zadatak predstavi učenicima, a zatim razmatraju njihovi uspješni i neuspješni načini rješavanja.

2. Matematički zadatak

U nastavi matematike, posebno tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog matematičkog obrazovanja, jedna od najčešćih aktivnosti jest rješavanje matematičkih zadataka. S jedne strane, učitelj se služi zadacima kako bi učenike uveo u odgovarajuće teme, objasnio matematičke ideje i koncepte, omogućio učenicima uvježbavanje odgovarajućih procedura i algoritama, osigurao mogućnost primjene naučenog i na kraju ispitao stečena znanja učenika. S druge strane, učenici upravo kroz rješavanje matematičkih zadataka imaju priliku učiti matematiku, ali i pokazati koliko su i kako usvojili i razumjeli materiju koju su učili. Drugim riječima, matematički zadatak je ključni element i sredstvo kako učenja i poučavanja matematike tako i procjene ishoda učenja i poučavanja (Stein, Grover i Henningsen, 1996; Sullivan, Clarke i Clarke, 2013).

U skladu s opisanim, u literaturi o matematičkom obrazovanju mogu se pronaći različite definicije koje opisuju što je to *matematički zadatak*. Tako, Stein i sur. (1996) pod *matematičkim zadatkom* podrazumijevaju „razrednu aktivnost čija je svrha usredotočiti pozornost učenika na određenu matematičku ideju“ (str. 460). U tom kontekstu, zadaci su različiti samo u slučaju kada su aktivnosti usmjerene na različite matematičke ideje. Ako više zadataka aktivnosti usmjeravaju na istu matematičku ideju oni se ne smatraju različitim zadacima. Slično tome, Sullivan i sur. (2013) pod *zadatkom* podrazumijevaju „informaciju koja služi kao poticaj za rad učenika, a prezentirana je u obliku pitanja, situacija i uputa koje su i polazište i kontekst za učenje“, a pod *aktivnošću* podrazumijevaju „i mišljenje i postupke, fizičke, izgovorene, napisane, snimljene, koje učenici poduzimaju kao reakciju na postavljeni zadatak“ (str. 13).

Iako postoje različite definicije, sve one razmatraju što i na koji način potiče učenike na aktivnost, što učenici imaju na raspolaganju za provedbu tih aktivnosti te što je rezultat tih aktivnosti. Najjednostavnije rečeno, matematički zadatak je ključno sredstvo interakcije između učitelja i učenika čija je konačna svrha učenje matematike i razvoj matematičkih vještina.

Odgovarajući opseg i vrsta zadataka koji se preporučuju koristiti u nastavi matematike propisani su nastavnim materijalom (kurikulum, udžbenici, zbirke zadataka, dodatni nastavni materijali poput nastavnih listića i sl.). Među tim zadacima, učitelj odabire one zadatke koje smatra prikladnima te ih takve ili preoblikovane stavlja pred učenike s odgovarajućim ciljem. Zatim učenik, svojim angažmanom, odgovarajućim načinom rada i rješavanjem postavljenog zadatka, ostvaruje ili ne ostvaruje ishode učenja. U skladu s takvom nastavnom praksom, Stein i sur. (1996) predlažu teorijski okvir za razmatranje zadatka u nastavi matematike kroz tri faze (Slika 1).

Slika 1. Tri faze zadatka u nastavi matematike

Naime, zadaci koji su ponuđeni u nastavnim materijalima imaju odgovarajuće karakteristike, kognitivne zahtjeve i namjenu korištenja. Ali, način na koji učitelj interpretira i predstavlja odabrani zadatak učenicima, a jednako tako i način na koji učenici razumiju i realiziraju predstavljeni zadatak mogu transformirati zadatak do te mjere da to nije više isti zadatak niti po karakteristikama niti po kognitivnim zahtjevima.

Stein i sur. (1996) razmatraju tri važne *karakteristike zadataka*: (F1) postojanje više različitih strategija kojima se zadatak može riješiti, (F2) postojanje više različitih reprezentacija kojima se može predstaviti rješenje i (F3) postojanje zahtjeva da se objasne i/ili opravdaju postupci rješavanja (str. 460). Također, razmatraju četiri *vrste misaonih procesa* koji određuju stupanj kognitivnog zahtjeva u svrhu rješavanja zadatka: (K1) prisjećanje zapamćenih formula, činjenica i sl., (K2 i K3) upotreba postupaka i algoritama bez ili sa pozornošću na koncepte koji stoje u pozadini kao i njihovo razumijevanje i (K4) složene strategije mišljenja i zaključivanja: stvaranje pretpostavki, interpretiranje, opravdavanje, refleksija i sl. (str. 461).

Kada učitelj predstavlja zadatak učenicima, on može dati kratku i vrlo jednostavnu uputu (npr. riješite ovaj zadatak), ali i prilično razrađenu uputu koja daje smjernice što se od njih očekuje, na koji način trebaju rješavati, na što trebaju pripaziti tijekom rješavanja itd. (npr. ispitajte sva rješenja, koristite više različitih metoda ili točno određenu metodu i sl.). Ovisno u kojoj mjeri poznaje materiju, ali i u kojoj mjeri poznaje svoje učenike i njihove potrebe, učitelj može mijenjati i svrhu odabranog zadatka, a ovisno o danim uputama može mijenjati i razinu kognitivnog zahtjeva.

Nadalje, predstavljeni zadatak učenik može realizirati na različite načine: može slijediti upute učitelja i provesti sve tražene zahtjeve, ali može odabrati i neki svoj put. Način realizacije ovisi o brojnim faktorima: prije svega o pravilima rada u učionici (samostalno, u paru, grupi, uz pomoć učitelja i sl.), o vremenu koje im je na raspolaganju za promišljanje o zadatku i rješavanje, o dostupnim sredstvima, o navikama i spremnosti da strpljivo i ustrajno rade na zadatku, posebno ako se radi o kognitivno zahtjevnijem zadatku.

Svaka od tih faza utječe na to u kojoj mjeri će odabrani zadaci ostvariti svoju svrhu, odnosno u kojoj mjeri će učenici rješavanjem postavljenih zadataka usvojiti odgovarajuće matematičke ideje i koncepte te razviti odgovarajuće matematičko mišljenje i vještine. Jer, različite vrste zadataka utječu na različite misaone procese koje učenici koriste dok rade na rješavanju zadataka, a kao posljedica toga ostvaruju se odgovarajući ishodi učenja. Ukoliko učitelj kroz postavljanje zadatka ili učenik kroz proces rješavanja zadatka mijenja karakteristike ili smanjuje kognitivne zahtjeve zadatka, željeno učenje se neće ostvariti (Stein i sur., 1996; Sullivan i sur., 2013).

Na primjeru jednog geometrijskog zadatka u kojem treba utvrditi istinitost postavljene tvrdnje ilustrirat će se neke opisane karakteristike i načini mijenjanja kognitivnih zahtjeva odabranog zadatka u procesu postavljanja i rješavanja.

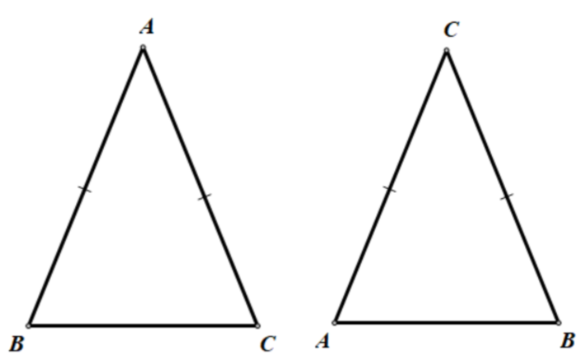
Zadatak 2.1: *Romb BDEF upisan je u trokut* ΔABC. *Njegova dijagonala* $\overline{BE}$ *okomita je na stranicu* $\overline{AC}$. *Dokažite da je trokut* ΔABC *jednakokračan* (Izvor: Zodik i Zaslavsky, 2007, str. 267).

Karakteristike zadatka: Zadatak se može riješiti na više načina (F1). Za njegovo rješavanje potrebno je izraditi vizualni prikaz kojim će se prikazati svi zadani elementi, a u procesu rješavanja potrebno je povezati vizualni prikaz i odgovarajući simbolički zapis (F2). U svrhu utvrđivanja istinitosti danog zaključka, potrebno je izvesti te jasno, sistematično i korektno prikazati niz logičkih zaključivanja, na temelju definicija i nekih svojstava trokuta i romba, a koji od pretpostavki vode do konačnog zaključka (F3). Iz opisanog je vidljivo da zadatak ima sve gore navedene karakteristike.

Kognitivna zahtjevnost zadatka. Zadatak nije moguće riješiti direktno primjenom nekog poznatog postupka, niti je moguće unaprijed znati odgovarajući ishod, budući da formulacija zadatka ne ukazuje na to koje dvije stranice trokuta su jednakih duljina. Kako bilo koje dvije od moguće tri stranice mogu biti jednakih duljina: $|AB| = |AC|$, $|BA| = |BC|$ ili $|CA| = |CB|$, potrebno je provesti detaljnu analizu prije izvođenja konačnog odgovora. Dakle, zadatak zahtjeva promišljanje, uspostavljanje konceptualnih veza, funkcionalno povezivanje vizualnog prikaza i simboličkog zapisa kako bi se opravdao tijek zaključivanja i dao konačan odgovor. Sve upućuje na visoku kognitivnu zahtjevnost postavljenog zadatka kojemu svrha može biti upravo razvijanje opisanih vještina.

Geometrijski problem najčešće je vezan uz izradu vizualnog prikaza. Sama izrada vizualnog prikaza može rješavanje problema olakšati ili otežati, bez obzira predstavlja li ga učitelj s određenom svrhom ili ga stvara sam učenik. Vizualni prikaz zadanog geometrijskog problema može se izraditi na različite načine.

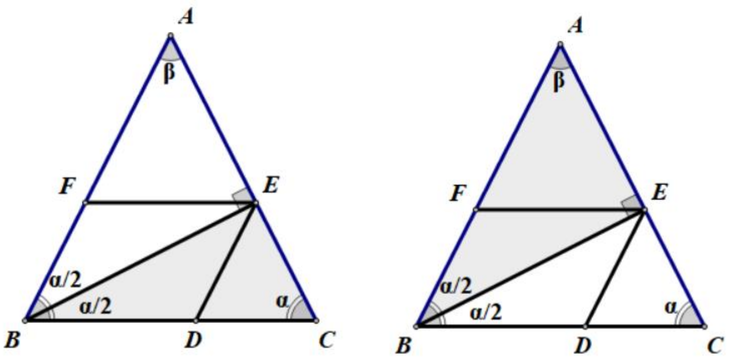
Učenici najčešće jednakokračni trokut ΔABC crtaju kao šiljastokutni trokut s horizontalnom osnovicom, a dulje stranice uzimaju za krakove, pri čemu nasuprot osnovici obično stavljaju vrh A ili vrh C (Slika 2).



Slika 2. Prototipni jednakokračni trokuti

U prvom slučaju, horizontalna osnovica je $\overline{BC}$, a krakovi $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, dok je u drugom slučaju horizontalna osnovica $\overline{AB}$, a krakovi su $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Dalje se razmatraju samo vizualni prikazi u kojima je vrh *A* nasuprot osnovici.

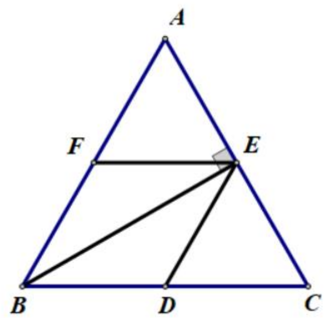
Vizualni prikazi sa svim potrebnim oznakama za rješavanje ovog zadatak dani su na Slici 3. Ovako postavljeni prikazi lako zavaraju učenike, posebno one koji se uvelike oslanjaju na to „kako nešto izgleda" jer ih mogu usmjeriti na pokušaj dokazivanja da je $|AB| = |AC|$, što u ovom slučaju nije moguće, osim u posebnom slučaju kada je ΔABC jednakostranični trokut. Također, neki učenici polazeći od ovog vizualnog prikaza lako padnu u zamku da za pretpostavku uzmu da je $|AB| = |AC|$ pa na temelju pogrešne pretpostavke izvedu zaključak da je trokut ΔABC jednakostranični.



Slika 3. Vizualni prikaz problema s prototipnim trokutima

Naime, uz pogrešnu pretpostavku da je $|AB| = |AC|$ izvodi se zaključak da su unutrašnji kutovi trokuta ΔABC uz vrhove *B* i *C* jednakih veličina: $\measuredangle CBA = \measuredangle ACB = \alpha$, a treći vrh je veličine $\measuredangle BAC = \beta$. Kako dijagonala romba raspolavlja unutrašnji kut romba, povlačenjem dijagonale $\overline{BE}$, koja je prema uvjetu zadatka okomita na stranicu $\overline{AC}$, dobivaju se dva pravokutna trokuta ΔBCE i ΔABE, kojima je jedan šiljasti kut veličine $\measuredangle CBE = \measuredangle EBA = \frac{\alpha}{2}$. Preostali šiljasti kutovi su veličine $\alpha = 90° - \frac{\alpha}{2} = \beta$, što znači da je $\beta = \alpha$, odnosno da je trokut ΔABC jednakostranični trokut. Tako učenik, stvarajući lažne pretpostavke u prototipnom vizualnom prikazu (gdje je $|AB| = |AC|$), dovodi sebe u situaciju da problem ne može riješiti ili da svoj proces rješavanja temelji na pogrešnoj pretpostavci.

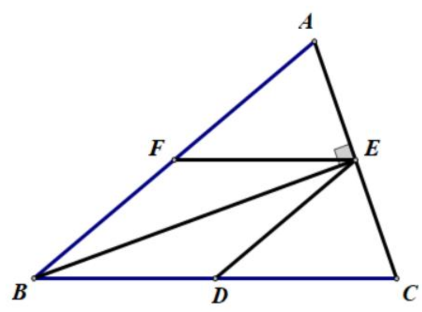
S obzirom da u zadatku nije navedeno koje su dvije stranice trokuta jednakih duljina, netko bi (bilo učenik sam ili učitelj u svrhu odgovarajućeg učenja) mogao krenuti od vizualnog prikaza u kojem je ΔABC jednakostranični trokut, što je samo poseban slučaj zadanog problema (Slika 4).



Slika 4. Vizualni prikaz posebnog slučaja

Međutim, ovaj vizualni prikaz u sebi prikriva ishod koji treba dokazati ($|BA| = |BC|$), čime se problem otežava jer učenici ne mogu na prvu vidjeti na što se usredotočiti i što treba dokazati. U takvoj situaciji neki se učenici mogu osjećati bespomoćnima i brzo odustati, dio njih može izvesti zaključak da trokut jest jednakostranični služeći se pogrešnom pretpostavkom, a tek poneki mogu doći do valjanog zaključka, bez „slijepog“ oslanjanja na prikaz.

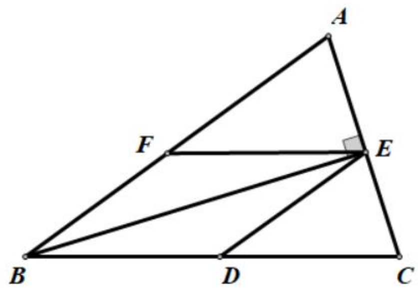
Učitelj bi učenicima mogao ponuditi i vizualni prikaz koji odražava stvarno stanje, tj. u kojem je ΔABC prikazan tako da su stranice, za koje treba dokazati jednakost ($|BA| = |BC|$), zaista na slici prikazane sukladnim dužinama (Slika 5).



Slika 5. Vizualni prikaz problema sa točnim odnosima

Ovaj vizualni prikaz olakšava problem i time smanjuje kognitivnu zahtjevnost zadatka jer direktno ukazuje na ishod koji treba dokazati, tj. da je $|BA| = |BC|$.

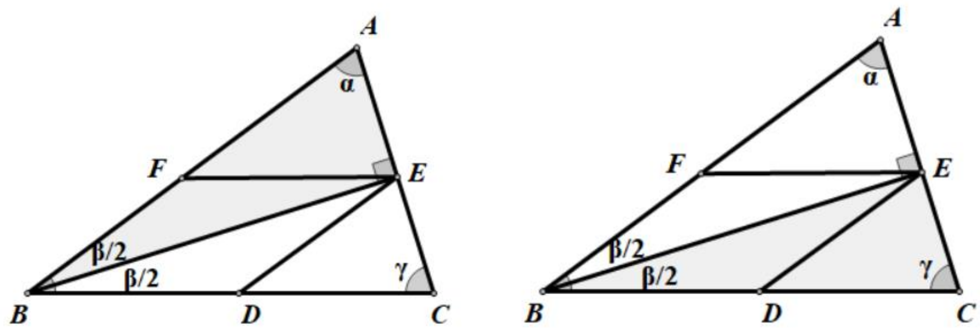
Konačno, vizualni se prikaz može temeljiti na trokutu ΔABC kojemu su sve stranice različitih duljina, budući da u zadatku nije istaknuto koje su dvije stranice jednakih duljina (Slika 6).



Slika 6. Vizualni prikaz problema za opći slučaj

Ovaj vizualni prikaz otežava problem i time povećava kognitivnu zahtjevnost zadatka jer ničim ne ukazuje na jednakost duljina dviju stranica, već se to tek treba otkriti. U procesu rješavanja treba jasno povezati vizualni prikaz i simbolički zapis u svrhu predstavljanja niza logičkih zaključaka kojima se utvrđuje istinitost postavljene tvrdnje.

Rješenje: Neka su unutrašnji kutovi trokuta uz vrhove *A*, *B* i *C* veličine α, β i γ redom te neka je dijagonala romba $\overline{BE}$ okomita na stranicu $\overline{AC}$ prema uvjetu zadatka. Povlačenjem dijagonale romba unutar trokuta ΔABC nastaju dva pravokutna trokuta ΔABE i ΔBCE (Slika 7).



Slika 7. Vizualni prikaz problema za opći slučaj s oznakama

Koristeći činjenicu da dijagonala romba $\overline{BE}$ raspolavlja unutrašnji kut pri vrhu *B*, mogu se razmatrati šiljasti kutovi pravokutnih trokuta ΔABE i ΔBCE. Ovi trokuti se podudaraju u jednom šiljastom kutu koji je veličine $\measuredangle EBA = \measuredangle CBE = \dfrac{\beta}{2}$. To nadalje znači da su i druga dva šiljasta kuta ovih trokuta podudarna jer su oni veličine $\alpha = 90° - \dfrac{\beta}{2} = \gamma$. Drugim riječima, unutrašnji kutovi trokuta ΔABC pri vrhovima A i C jednakih su veličina. Kako su u trokutu nasuprot kutova jednakih veličina i stranice jednakih duljina, tj. $|BA|=|BC|$, trokut ΔABC je jednakokračni trokut s krakovima $\overline{BA}$ i $\overline{BC}$ te osnovicom $\overline{AC}$.◆

Prema razmatranju procesa rješavanja prethodnog zadatka, vidljivo je kako svaki od vizualnih prikaza može utjecati na način kako će učenik pristupiti rješavanju problema, a otkrivanjem ili prekrivanjem određenih uvjeta kognitivni zahtjevi za učenike se mijenjaju.

Budući da je zadaća učitelja potaknuti učenike na učenje matematike, a ključni medij za interakciju između učenika i učitelja su matematički zadaci, pred učiteljem je izazov i odgovornost osigurati različite vrste zadataka kako bi učenici usvojili različite matematičke koncepte s razumijevanjem i razvili odgovarajuće matematičke vještine. No, o vrstama zadataka i načinu na koji se koriste odabrani zadaci u nastavi matematike ovisi ne samo učenje matematike već i kakvu će sliku učenici razviti o matematici kao predmetu. Ako se učestalo koriste računski zadaci koji se rješavaju „šablonski“, imitiranjem metoda koje ponudi učitelj i primjenom zapamćenih algoritama, onda se stvara slika matematike kao predmeta na kojem se uči računati. Ali, ako se koriste kognitivno zahtjevni zadaci za čije rješavanje treba provesti istraživanje, analizu, povezivanje sa prethodnim znanjem, postavljanjem pretpostavki te opravdavanjem dobivenih rješenja, onda se stvara slika matematike kao predmeta koji osigurava razvoj različitih znanja i vještina. Ako se pri tome koriste i zadaci iz realnog života, učenje matematike dobiva puni smisao i stvara se slika matematike kao predmeta koje je vrijedno truda (Stein i sur., 1996; Sullivan i sur., 2013).

Kako bi učitelj mogao odabrati dobre zadatke u svrhu postizanja željenog učenja i razvijanja pozitivne slike o matematici kao predmetu, potrebno je poznavati različite vrste zadataka, njihove karakteristike i načine realizacije te vršiti balansiranje među njima. Stoga se u sljedećoj cjelini prikazuju različite vrste zadataka i opisuju njihove karakteristike.

3. Vrste matematičkih zadataka

Postoje brojne klasifikacije i tipizacije matematičkih zadataka (Yeo, 2007; Foster, 2013; Jones i Pepin, 2016). Poznavanje karakteristika različitih vrsta matematičkih zadataka, njihovih mogućnosti i ograničenja preduvjet je odabira optimalne mjere raznovrsnih zadataka u svrhu ostvarivanja odgovarajućih ciljeva poučavanja. S obzirom da zadatak može imati više različitih karakteristika, razvrstavanjem zadataka prema različitim kriterijima isti zadaci se mogu naći u različitim klasama i pod različitim imenima pa je tim više važno poznavati i različite klasifikacije te njihove sličnosti i razlike.

Zadaci se mogu analizirati na različite načine: prema sadržaju (brojevi, varijable i funkcije, geometrija, statistički podaci i dr.), prema aktivnostima koje se provode (prikazivanje, računanje, operiranje, konstruiranje, modeliranje, interpretiranje, tumačenje u odgovarajućem kontekstu, argumentiranje, zaključivanje i dr.), prema složenosti (potrebne osnovne ili više razine znanja), prema broju i formi odgovora (nijedno, jedno, dva ili više rješenja, rješenja su ponuđena ili nisu ponuđena), prema broju i načinu rješavanja (može se riješiti samo na jedan način ili je moguće više načina, metoda je poznata ili treba pronaći strategiju rješavanja), prema kontekstu (čista matematika ili realni svijet) itd.

U ovom radu predstavljaju se samo neke klasifikacije i tipizacije prirode matematičkih zadataka koje mogu služiti učitelju kao dobar orijentir pri odabiru i balansiranju različitih vrsta zadataka u svrhu optimiziranja ishoda učenja. No, to ne znači da se i neke druge vrste zadataka ne mogu smatrati korisnima i svrsishodnima.

3.1. Zadaci prema cilju

Jednu od najpoznatijih klasifikacija matematičkih zadataka postavio je mađarski matematičar George Polya prije gotovo 80 godina. U knjizi *Kako ću riješiti matematički zadatak* (Izvornik: *How to solve it*, 1945) Polya sve matematičke zadatke razvrstava na *odredbene* i *dokazne*, s obzirom na cilj koji treba postići (Polya, 1966).

***Odredbeni* zadaci** su karakteristični prema glavnim dijelovima od kojih su sastavljeni: nepoznanica, zadani podaci i uvjet, a njihov cilj je „odrediti izvjestan objekt, nepoznanicu zadatka“

(Polya, 1966, str. 91). Kako bi se ostvario cilj, potrebno je uspostaviti vezu između nepoznanice i zadanih podataka, uz ispunjavanje postavljenog uvjeta. Nadalje, Polya navodi da *odredbeni* zadaci mogu biti teorijski i praktični, apstraktni i konkretni, ozbiljni ili tek zagonetke, čime ukazuje na to da za odredbeni zadatak nije bitno što je sadržaj zadatka, već njegova forma, tj. glavni dijelovi od kojih je sastavljen.

Primjer 3.1.1: *Sin ima 4, a otac 32 godine. Odredite koliko će godina imati sin kada otac bude od njega stariji 3 puta.*

Za uspješno rješavanje odredbenog zadatka Polya naglašava da je, prije svega, važno moći prepoznati njegove glavne dijelove te uspostaviti vezu među njima. U ovom zadatku *zadani podaci* su godine sina i oca u nekom trenutku (4 i 32 godine), a *nepoznanica* je broj godina sina u nekom drugom trenutku, koji je određen zadanim *uvjetom* (u trenutku kada otac bude 3 puta stariji od sina). Cilj je saznati godine sine u novom trenutku, a on se može postići kada se uspostavi odgovarajuća veza između nepoznanice i zadanih podataka na temelju zadanog uvjeta.◆

Primjer 3.1.2: *Odrediti ploštinu trokuta, ako su duljine njegovih stranica u omjeru* $3:4:5$*, a njegov opseg iznosi 72 cm.*

U ovom odredbenom zadatku *zadani podaci* su opseg trokuta (72) i mjerna jedinica duljine (cm), a *nepoznanica* je ploština trokuta, odnosno broj koji govori o veličini koju zauzima površina trokuta. Ploština trokuta određena je dimenzijama i oblikom trokuta što se može saznati iz zadanog *uvjeta*, a to je omjer duljina stranica trokuta ($3:4:5$). Cilj je saznati koliku površinu zauzima opisani trokut, a on se može ostvariti ako se saznaju dimenzije trokuta (i oblik) te odabere odgovarajuća formula za određivanje ploštine trokuta.◆

***Dokazni* zadaci** su zapravo tvrdnje, a njihov cilj je „uvjerljivo pokazati da je izvjesna, jasno formulirana tvrdnja istinita ili pak pokazati da je pogrešna“ (Polya, 1966, str. 91). Kako su glavni dijelovi tvrdnje pretpostavka (P) i zaključak (Q), ona se obično mogu iskazati u obliku implikacije ($P \Rightarrow Q$) pa je cilj svakog dokaznog zadatka utvrditi istinitost zaključka (Q) zadane tvrdnje uz uvažavanje pretpostavke (P) te tvrdnje.

Primjer 3.1.3: *Dokažite da je umnožak dvaju uzastopnih parnih brojeva djeljiv brojem 8.*

Slično kao i kod odredbenih zadataka, Polya naglašava da je za uspješno rješavanje dokaznog zadatka važno moći prepoznati njegove glavne dijelove te uspostaviti vezu među njima. Za prepoznavanje glavnih dijelova tvrdnje korisno je tvrdnju iskazati u obliku implikacije korištenjem forme „Ako…, onda…“. U ovom slučaju, tvrdnja bi se mogla iskazati na sljedeći način: *Ako su dva prirodna broja parna i uzastopna, onda je njihov umnožak djeljiv brojem 8*. U iskazu tvrdnje oblikovane na ovaj način lako se prepoznaje da je pretpostavka (P): *zadana su dva prirodna broja, koja su parna i koja su uzastopna*, a zaključak (Q) je: *umnožak tih dvaju brojeva je djeljiv brojem 8*. Kako bi se postigao cilj, tj. utvrdila istinitost zaključka (Q), potrebno je poznavati odgovarajuće definicije i tvrdnje te uspostaviti korektan logički slijed korektnih zaključaka koji će povezati pretpostavku (P) i zaključak (Q), bilo direktno ili indirektno.◆

Primjer 3.1.4: Dokažite da zbroj veličina unutrašnjih kutova trokuta iznosi 180°.

Pretpostavka (Q) ove tvrdnje jest da je geometrijski lik trokut, kojemu su unutrašnji kutovi veličine α, β i γ. Zaključak (Q) za kojeg treba ispitati istinitost jest da je zbroj veličina kutova konstantan i iznosi 180°, tj. $\alpha+\beta+\gamma=180°$.◆

Uz ove dvije vrste zadataka, Polya posebno izdvaja *konstruktivne* zadatke čiji je cilj konstruirati geometrijsku figuru na temelju zadanih podataka i postavljenog uvjeta. Iako ih Polya uključuje u odredbene zadatke, konstruktivni zadaci ispunjavaju i karakteristike dokaznog zadatka jer je pri konstruiranju figure potrebno utvrditi istinitost (jednoznačnost) svakog koraka.

Primjer 3.1.5: *Konstruirati trokut kojemu su poznate duljine dviju stranica te duljina visine na jednu od tih stranica.*

S aspekta odredbenog zadatka, u ovom zadatku zadane su tri dužine, a nepoznanica je trokut. Uvjet je da dvije zadane dužine budu stranice trokuta, a treća dužina da bude visina na jednu od tih stranica. Cilj zadatka je konstruirati trokut koji ispunjava postavljene uvjete. S aspekta dokaznog zadatka treba ispitati postojanje figure i mogućnosti konstrukcije.

Među zadacima osnovnoškolske matematike najčešće dominiraju odredbeni zadaci, ali uz malo znanja i vještine dokazni zadaci se mogu preformulirati u oblik odredbenog i obratno. I jedni i drugi mogu biti različite složenosti.

3.2. Zadaci prema kognitivnim zahtjevima

Za razliku od prethodno opisane klasifikacije koja razmatra zadatke prema cilju, pri čemu je za uspješno ostvarivanje cilja potrebno prepoznati glavne dijelove od kojih su sastavljeni, sljedeća klasifikacija zadatke razmatra s aspekta razine matematičkog mišljenja koje je potrebno za rješavanje zadatka.

Na temelju petogodišnjeg proučavanja karakteristika zadataka koji se koriste u nastavi matematike s učenicima viših razreda osnovne škole, od postavljanja do realizacije, Smith i Stein (1998) su zaključili da se svi matematički zadaci mogu razvrstati u četiri kategorije s obzirom na kognitivnu zahtjevnost koja se od učenika traži, odnosno s obzirom na razinu matematičkog mišljenja koja je potrebna za uspješno rješavanje odgovarajućeg zadatka (str. 345): zadaci *memoriranja*, zadaci s *procedurama bez poveznica s konceptima*, zadaci *s procedurama uz poveznice s konceptima* te zadaci *bavljenja matematikom*.

Zadaci *memoriranja* su svi oni zadaci koji se mogu riješiti reprodukcijom prethodno naučenih pravila, formula ili definicija. To su zadaci s najnižim kognitivnim zahtjevima jer pravila, formule i definicije mogu biti naučene napamet, bez razumijevanja te ih se dovoljno prisjetiti i reproducirati.

Primjer 3.2.1: *Iskaži pravilno množenja dvaju razlomaka*.

Kao odgovor na postavljeno pitanje učenik može reći: *Dva razlomka množe se tako da im se pomnože brojnici i pomnože nazivnici*.

Ovaj zadatak zahtjeva samo iskazivanje, ali ne i objašnjavanje, što znači da je dovoljno navesti pravilo, koje je možda učenik naučio napamet, a da pri tome uopće ne razumije što je razlomak, niti što znači brojnik, a što nazivnik. Za reproduciranje naučenog (napamet) nije potrebno uložiti veći kognitivni napor.◆

Zadaci s *procedurama bez poveznice s konceptima* su svi oni zadaci koji se mogu riješiti provođenjem odgovarajuće procedure ili algoritma ili primjenom odgovarajuće formule i sl., a da pri tome nije potrebno razumijevanje niti tumačenje onoga što se nalazi u pozadini provedenih postupaka.

Primjer 3.2.2: *Pomnoži:* $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{6}$.

Učenik bi mogao dati sljedeći odgovor: $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{6}=\frac{3\cdot 8}{4\cdot 6}=\frac{24}{24}$. No, iako je rezultat korektan, prikazani proces nije dovršen do kraja jer se razlomak još može skratiti, a skraćivanje se može provesti i prije i nakon množenja razlomaka.

Ovaj zadatak zahtjeva samo rutinsko izvođenje operacije množenja i usmjeren je na davanje točnog odgovora, ne i objašnjavanje provedene operacije množenja. To znači da učenik do točnog rezultata može doći samo na temelju naučene i uvježbane procedure množenja, a bez ikakvog razumijevanja operacije množenja dvaju razlomaka. Za rutinsko izvođenje operacije nije potrebno uložiti veći kognitivni napor.◆

Prema Smith i Stein (1998) ova dva tipa zadataka nazivaju se **zadaci *s nižim kognitivnim zahtjevima*** jer za njihovo uspješno rješavanje nije potrebno uložiti veći kognitivni napor, niti razumijevanje svega onoga što se nalazi u pozadini provedenih aktivnosti, kao ni objašnjavanje provedenog. Takvi zadaci od učenika zahtijevaju samo rutinsko rješavanje ili primjenu pravila u svrhu dobivanja točnog rješenja.

Zadaci *s procedurama uz poveznice s konceptima* su svi oni zadaci za čije rješavanje nije dovoljno samo poznavati proceduru, algoritam ili pravilo već je potrebno razumijevanje koncepata i ideja koji se nalaze u pozadini provedenih postupaka. Ovi zadaci često zahtijevaju objašnjenje provedenog postupka što nije moguće dati bez odgovarajućeg teorijskog znanja i vještina.

Primjer 3.2.3: *Odredi koliko je jedna šestina od jedne polovine. Svoje rješenje prikaži služeći se nekim geometrijskim likom (npr. pravilnim šesterokutom) i objasni provedeni postupak.*

Učenik bi mogao postupiti tako da uzme dva pravilna šesterokuta koja čine jednu cjelinu pa je jedan od njih polovina te cjeline. Zatim bi taj šesterokut podijelio na 6 jednakih dijelova, odnosno na 6 trokuta pa jedan trokut predstavlja šestinu te polovine. Budući da u dva šesterokuta ima ukupno 12 trokuta, to je jedan trokut dvanaestina polaznog lika, odnosno šestina od polovine je jedna dvanaestina. Uz vizualni prikaz, zaključak se može opisati i simbolički (Slika 8).

Zaključak

$\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{6}$ od $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

Slika 8. Određivanje šestine od polovine

U ovom zadatku zahtjeva se provođenje procedure uz vizualni prikaz i objašnjenje. Za njegovo uspješno rješavanje učenik treba razumjeti pojam razlomka, operaciju množenja smjestiti u kontekst, a u svrhu objašnjavanja povezati različite reprezentacije. Za funkcionalno povezivanje različitih reprezentacija i konceptualno objašnjavanje provedenih postupaka potrebno je uložiti veći kognitivni napor.◆

Zadaci *bavljenja matematikom* su svi oni zadaci u kojima je potrebno uspostaviti funkcionalne veze među pojmovima, odabrati optimalnu strategiju, ispitati mogućnosti i ograničenja, objasniti i konačno opravdati ispravnost provedenoga. Sve to zahtjeva složeno i ne-algoritamsko razmišljanje te značajan kognitivni napor, odnosno matematičko mišljenje više razine.

Primjer 3.2.4: *Kreirati realnu situaciju u kojoj bi koristio* $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$*, a zatim riješiti postavljeni problem bez korištenja pravila, uz obrazloženje provedenog postupka.*

Učenik bi mogao dati sljedeći odgovor: Za ručak mi je mama dala tri četvrtine pizze koju smo naručili, ali ja sam pojeo samo dvije trećine komada kojeg mi je dala. Koliki dio pizze sam zapravo pojeo?

Zaključak

$\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Slika 9. Određivanje dvije trećine od tri četvrtine

U svrhu objašnjenja učenik može nacrtati pravokutnik, podijeliti ga na četiri jednaka dijela i obojati tri dijela kako bi istaknuo koliki komad pizze je dobio od mame. Taj komad je već podijeljen na tri jednaka dijela pa svaki dio predstavlja trećinu dobivenog dijela, a kako je on pojeo dvije trećine, drugo bojanje predstavlja komad pizze koji je pojeo. Gledajući cijelu pizzu (polazni pravokutnik), pojedeni dio predstavlja dvije četvrtine, odnosno polovinu pizze.

U ovom zadatku zahtjeva se odabir realnog konteksta i osmišljavanje problema čije rješenje će odgovarati zadanoj operaciji množenja dvaju razlomaka, što od učenika zahtjeva promišljanje i kreativnost. Uz to, za uspješno rješavanje zadatka potrebno je razumijevanje pojma razlomka, konceptualno razumijevanje množenja dvaju razlomaka, fleksibilno korištenje različitih reprezentacija i njihovo funkcionalno povezivanje. Vidljivo je da za kreiranje realne situacije treba uložiti značajan kognitivni napor, odnosno matematičko mišljenje više razine.◆

Prema Smith i Stein (1998) posljednja dva tipa zadataka nazivaju se **zadaci *s višim kognitivnim zahtjevima*** jer je za njihovo uspješno rješavanje potrebno uložiti veći kognitivni napor. Takvi zadaci od učenika zahtijevaju dublje razumijevanje matematičkih koncepata, procesa ili odnosa, analizu i odabir prikladne strategiju, fleksibilno korištenje različitih reprezentacija, funkcionalno povezivanje različitih pojmova, sintezu, tumačenje, objašnjavanje i dr.

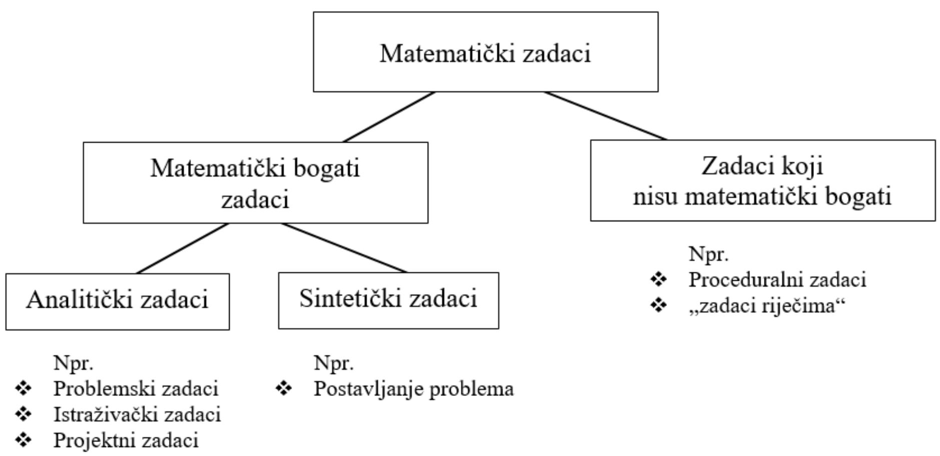
Među zadacima osnovnoškolske matematike najčešće dominiraju zadaci s nižim kognitivnim zahtjevima, a vrlo malo zadataka s višim kognitivnim zahtjevima. Ali, i jedni i drugi mogu biti različite složenosti. Uz malo znanja i vještine, zadacima se može mijenjati kognitivna zahtjevnost ovisno o cilju koji se želi postići.

3.3. Zadaci prema didaktičkoj ulozi

Proučavajući različite vrste zadatka, Yeo (2007) poseban fokus stavlja na svrhu koju pojedini zadaci mogu imati u nastavi matematike jer različiti zadaci služe za razvoj i njegovanje različitih vještina, znanja i mišljenja. Tako će kroz neke zadatke učenici razvijati osnovne proceduralne vještine, dok će kroz druge razvijati različite strategije i metode (npr. strategije rješavanja problema, strategije prebrojavanja, bojanja itd.; metodu nabrajanja, tablice, metodu rada unatrag, vizualnu metodu, metodu ispitivanja slučajeva itd.), zatim stjecati nova znanja, razvijati različite matematičke procese (istraživanje, analiziranje, sintetiziranje, opravdavanje i dr.), usvajati način matematičke komunikacije (verbalno, vizualno, simbolički) itd. Svaki bi učitelj, smatra Yeo, trebao poznavati različite vrste zadataka i njihove karakteristike kako bi odabirom i postavljanjem različitih zadataka omogućio svojim učenicima ne samo stjecanje proceduralnih vještina, već razvoj matematičkog razumijevanja i kompetencija, jednako kao i razvoj interesa i spremnosti za bavljenje matematikom (Yeo, 2007).

Prema opisanim namjenama, Yeo daje jednu „grubu" podjelu na zadatke koji su *matematički bogati* i one koji *nisu matematički bogati*, naglašavajući da se pri svakoj klasifikaciji mogu pojaviti sive zone, pa tako i u ovom slučaju, jer jedan te isti zadatak može imati karakteristike obiju klasa, a mogu postojati i zadaci koji ovom klasifikacijom nisu obuhvaćeni (Slika 10).

***Matematički bogati* zadaci** su u pravilu zadaci koji su izazovni i slojeviti te osiguravaju stjecanje novog znanja, konceptualnog razumijevanja, razvoj strategija rješavanja problema, razvoj analitičkog i sintetičkog mišljenja, razvoj kreativnosti, metakognicije (znanja o znanju) i dr. Među njima Yeo posebno razmatra *problemske* zadatke (kraće *problemi*), *istraživačke* zadatke i zadatke *postavljanja problema*, zatim zadatke *vođenog otkrivanja*, različite vrste *kontekstualnih* zadataka te zadatke *otvorenog tipa*. Svaki od opisanih tipova zadataka može se koristiti s točno određenom namjenom, ali među njima ima i preklapanja. Također, svaki od njih može varirati od jednostavnijeg do složenijeg, što ne ovisi samo o strukturi zadatka već i o učenicima koji rješavaju postavljeni zadatak.



Slika 10. Klasifikacija zadataka prema namjeni poučavanja

Zadaci koji *nisu matematički bogati* su zadaci koji su u pravilu manje atraktivni i nisu izazovni, a glavna svrha im je omogućiti učenicima uvježbavanje postupaka koji su obrađeni na nastavi. Na primjer, određivanje vrijednosti aritmetičkog izraza, rješavanje linearnih, kvadratnih i drugih jednadžbi, određivanje opsega i ploštine geometrijskih likova itd. I ovi su zadaci važni jer učenici trebaju steći odgovarajuće proceduralne vještine budući da su upravo te vještine potrebne u nepoznatim situacijama i rješavanju matematički bogatih zadataka (Smith i Stein, 1998; Yeo, 2007). Među ove zadatke Yeo uvrštava i „zadatke riječima" kroz koje učenik uvježbava ono što je učitelj prethodno poučavao.

Prema opisanome može se uočiti da donekle postoji podudarnost između klasifikacija koju izlažu Yeo te Smith i Stein. Naime, matematički bogati zadaci su zasigurno zadaci viših kognitivnih zahtjeva, pri čemu Yeo specificira različite vrte unutar njih, dok zadaci za koje Yeo smatra da nisu matematički bogati, iako jesu važni, odgovaraju zadacima nižih kognitivnih zahtjeva koje opisuju Smith i Stein. U nastavku se daju primjeri zadataka te kojoj vrsti pripadaju kako to navodi Yeo.

***Problemski* zadaci ili *problemi*.** Prema Hendersons i Pingary (1953), zadatak treba ispunjavati tri uvjeta da bi se smatrao problemom:

1) onaj tko rješava zadatak treba biti svjestan jasno postavljenog cilja i željeti ga postići
2) na putu do postavljenog cilja postoji neka prepreka, a do tada poznate metode i procedure nisu dovoljne za otklanjanje te prepreke u svrhu postizanja cilja
3) kako bi rješavatelj problem jasno razumio, identificirao različite mogućnosti i testirao ih treba uložiti veći kognitivni napor i dublje promišljanje.

Drugim riječima, svaki zadatak u kojem je cilj jasan, ali se ne može odmah odrediti koliko rješenja ima ili metoda kojom bi se došlo do rješenja mogao bi se smatrati problemskim zadatkom. Međutim, je li neki zadatak problem ne može se razmatrati odvojeno od onoga tko ga rješava. Jer, obični proceduralni zadatak može za nekog učenika biti problem ukoliko ne poznaje metodu rješavanja (npr. treba riješiti kvadratnu jednadžbu, a poznaje rješavanje samo linearnih jednadžbi). Ali, isto tako, ako su učenici neko vrijeme bili izloženi rješavanju odgovarajućih problemskih zadataka, nakon odgovarajuće vježbe takvi zadaci mogu postati obični rutinski zadaci. Stoga, je li neki zadatak problem, nije svojstvo koje je inherentno matematičkom zadatku, već to ovisi o prethodnom znanju, iskustvu i sposobnostima onoga tko rješava taj zadatak u zadanom trenutku (Yeo, 2007).

U procesu traženja puta do rješenja i otklanjanja mogućih prepreka koje se na tom putu pojave, učenici moraju povezati različite matematičke koncepte te pronaći odgovarajuću strategiju i metodu. Stoga je glavna svrha problemskih zadataka razvijanje različitih strategija i metoda rješavanja te povezivanje matematičkih koncepata kao i njihovih reprezentacija čime se i mišljenje učenika podiže na višu razinu.

Primjer 3.3.1: *Odrediti posljednju znamenku broja* 3^{2007}.

Cilj zadatka je jasan (odrediti posljednju znamenku potencije), ali učenicima koji nikada nisu bili izloženi zadacima ove vrste, ovaj zadatak može biti problem jer za njih nije odmah vidljiva metoda koju bi mogli koristiti u svrhu otkrivanja posljednje znamenke. Stoga je svrha ovog zadatka pronaći neku strategiju kojom bi se mogao uočiti obrazac ponašanja posljednje znamenke, a zatim prepoznati koji dio obrasca predstavlja upravo 2007. znamenku.

Međutim, nakon što učenici riješe odgovarajući broj sličnih zadataka, ovaj zadatak više neće biti problem jer će im metoda biti poznata.

Istraživački **zadaci.** Ukoliko u zadatku treba nešto istražiti, ali nije jasno navedeno što treba istražiti, onda takav zadatak izlazi izvan okvira problemskog zadatka te se naziva istraživački zadatak. Pri tome, *matematičko istraživanje* podrazumijeva sustavno istraživanje nepoznate situacije u svrhu otkrivanja matematičkih karakteristika.

Problemski zadatak se u pravilu može jednostavno preformulirati u istraživački zadatak tako da se cilj zadatka ne postavi jasno, već učenik sam postavlja cilj koji želi istražiti. S obzirom da različiti učenici mogu postaviti različite ciljeve, istraživački zadaci potiču divergentnu aktivnost, dok kod problemskog zadatka postoji samo jedan cilj koji treba postići pa oni potiču konvergentnu aktivnost. Također, budući da učenici najprije trebaju sami odrediti cilj, oni zapravo prvo trebaju postaviti ono što će rješavati, a tek onda rješavati pa istražni zadaci uključuju i postavljanje problema (Yeo, 2007).

Primjer 3.3.2: *Istražiti potenciju broja* 3.

S obzirom da u ovom zadatku nije specificirano što treba istražiti, jedan učenik može istraživati kako se mijenja posljednja znamenka, a drugi učenik kako se mijenjaju posljednje dvije znamenke u potencijama broja 3, dok treći učenik može istraživati kako se mijenja zbroj svih znamenki potencije broja 3 itd.

Svrha ovog zadatka jest pružiti učenicima priliku da kroz divergentnu aktivnost samostalno istražuju nepoznatu situaciju, postave sami neki problem, a zatim ga odabirom odgovarajuće strategije riješe, u skladu sa svojim predznanjima i sposobnostima.

Zadaci *postavljanja problema*. Potreba za postavljanjem problema može se javiti u različitim situacijama. Tako se kod istraživačkih zadataka odmah na početku, nakon određivanja cilja, postavlja problem, koji se potom i rješava. Međutim, pri rješavanju složenijeg problema, može se u nekom trenutku postaviti neki jednostavniji, srodni problem, koji će pomoći za rješavanje polaznog problema. Također, nakon rješavanja nekog problema, mogu se generirati novi problemi tako da se mijenja cilj ili neki uvjet unutar zadatka. Na primjer, nakon rješavanja problemskog zadatka iz primjera 3.3.1. netko bi mogao postaviti sljedeći zadatak.

Primjer 3.3.3: *Odrediti posljednju znamenku broja* 4^{2007} ili *Istražiti potenciju broja 4*.

Međutim, kod zadataka postavljanja problema glavna svrha nije postaviti problem za rješavanje, već postaviti originalan, zanimljiv i složeni zadatak. U tom smislu, svaki učenik problem postavlja u skladu sa svojom kreativnošću i znanjem pa se umjesto o točnim odgovorima može govoriti o valjanim odgovorima.

Zadaci postavljanja problema također potiču na divergentnu aktivnost, u kojoj svaki učenik može raditi u skladu sa svojim sposobnostima i prema svojoj razini znanja, a zahtjeva i razumijevanje odgovarajućih koncepata koji dovode do povezivanja pojedinih dijelova u jednu cjelinu. Na taj se način razvija sintetičko mišljenje i vještina sintetičkog povezivanja različitih elemenata u jednu funkcionalnu cjelinu.

Primjer 3.3.4: *Napišite problem koji će dovesti do formiranja jednadžbe* $5x-2=33$, *a zatim riješite jednadžbu i odgovorite na pitanje u svojem problemu.*

U ovom zadatku svrha je osmisliti neki problem iskazan riječima koji sadrži matematičke elemente i koji će za potrebe rješavanja trebati jednadžbu koja je zadana. U ovom procesu naglasak je više na osmišljavanju originalne i zanimljive priče, dok je rješavanje postavljenog problema u drugom planu. Zato u ovom procesu najviše do izražaja dolaze učenici koji su snalažljivi, kreativni i originalni.

Zadaci *vođenog otkrivanja*. Zadaci mogu biti strukturirani tako da prolaskom kroz različite faze učenik samostalno otkriva neke matematičke činjenice, formulu, pravilo i sl., a učitelj u svakom trenutku može pomoći učeniku ukoliko je potrebno. I u ovim zadacima učenici samostalno istražuju u svrhu otkrivanja cilja, ali za razliku od istraživačkih zadataka, njegovo istraživanje je vođeno strukturom koju je osmislio učitelj i usmjereno je k cilju kojeg je osmislio učitelj. Također, u ovim zadacima glavna svrha je otkrivanje postavljenog cilja, dok je kod istraživačkih zadataka proces istraživanja važniji od cilja. Osim toga, u istraživačkim zadacima moguće je da učenici dođu do otkrića koje učitelj uopće nije imao na umu, dok se kod zadataka s vođenim otkrivanjem tako nešto rijetko događa (Yeo, 2007).

Primjer 3.3.5: *Unutar zadanog kruga istražiti odnos između jednog obodnog kuta i središnjeg kuta nad istim kružnim lukom.*

Svrha postavljenog zadatka jest otkriti odnos da je središnji kut dva puta veći od pripadnog obodnog kuta i bez obzira je li sam proces otkrivanja više ili manje strukturiran, ishod tog procesa je uvijek samo jedan: *Središnji kut je dvostruko veći od pripadnog obodnog kuta*.

Prethodni zadatak može biti i istraživački ako se cilj otvori, npr. da zahtjev zadatka bude da se istraže obodni i središnji kutovi nad bilo kojim kružnim lukom. U tom slučaj, učenici mogu otkriti ne samo jednu relaciju već više njih: osim opisanog odnosa, netko od učenika može otkriti da su *svi obodni kutovi nad istim ili sukladnim kružnim lukovima podudarni*, netko drugi može otkriti da je *obodni kut nad promjerom kružnice pravi* ili da su *nasuprotni obodni kutovi nad istom tetivom suplementarni* i dr.

Svi prethodno opisani zadaci bavili su se isključivo „čistom matematikom“, sadržajem unutar apstraktnog matematičkog konteksta, zato se oni još nazivaju i *akademski* zadaci. U njima ni na koji način nije uključen kontekst stvarnog svijeta.

***Kontekstualni* zadaci**. Ukoliko se unutar zadatka koriste iskustva iz stvarnog života (cijene proizvoda, dimenzije objekata i sl.) zadaci se nazivaju *kontekstualni* zadaci. Ako su podaci iz stvarnog svijeta izmišljeni, onda se zadaci još nazivaju i *fiktivni* ili *polu-realni* zadaci, a ukoliko zadatak razmatra stvarne podatke i situacije iz realnog života, onda se oni nazivaju *autentični* zadaci. Ovi zadaci mogu biti zadani na različite načine: kao problemski, istraživački, projektni itd.

Praksa pokazuje da kontekstualni zadaci koji su povezani s iskustvima učenika imaju veliki potencijal za izazov i angažman učenika i upravo kroz rad na tim zadacima učenici vide smisao učenja matematike (Yeo, 2007; Sullivan i dr. 2013).

Primjer 3.3.6. *U liftu jedne zgrade stoji natpis „Lift prema gore može nositi najviše 14 osoba". U jutarnjoj gužvi, 269 osoba se želi popeti ovim liftom. Koliko puta lift mora ići prema gore*?

Na prvu bi se broj 269 mogao samo podijeli s 14 i ustanoviti da vrijedi $269 = 19 \cdot 14 + 3$ te zaključiti kako lift treba ići najmanje 20 puta prema gore, kako bi sve osobe stigle na svoje odredište. Međutim, kako se radi o stvarnoj životnoj situaciji (autentični zadatak) prirodno je razmatrati mogućnosti realnog konteksta, npr. da lift neće uvijek biti pun, što dovodi do različitih odgovora na postavljeno pitanje.

Glavna svrha kontekstualnih zadataka je osiguravanje okruženja u kojem će učenici imati priliku analizirati, tumačiti, uočavati obrasce, zaključivati, stvarati generalizacije itd., odnosno razvijati i analitičko i sintetičko mišljenje. No, najvažnije od svega jest da ti zadaci za učenike imaju nekog smisla. Na primjer, učenici mogu dobiti zadatak da istraže kako bi optimalno mogli organizirati jednodnevni izlet. Ukoliko učenici razmišljaju samo o hipotetskom izletu, onda je zadatak polu-realistični, ali ako će oni i poći na taj izlet, onda je to autentični zadatak i za njih ima više smisla.

Zadaci *otvorenog tipa*. S obzirom da se zadatak može razmatrati kroz različite aspekte: prema cilju, metodi rješavanja, vrsti odgovora, postojanju smjernica za rješavanje i sl., otvorenost zadatka može ovisiti o svakom od tih aspekata. Yeo (2007) razmatra tri vrste otvorenosti:

(1) *Otvorenost zadatka koja ovisi o učeniku*. Zadatak u kojem postoji više različitih metoda kojima se može doći do rješenja, smatra se otvorenim s obzirom na metodu te o učeniku ovisi koju će metodu koristiti. Na primjer, problemski zadatak s više načina rješavanja. Oni se često koriste za razvoj ili otkrivanje kreativnosti, a poznati su i kao „multiple solution task".

(2) *Otvorenost koja je svojstvena zadatku*. Ako zadatak ima više korektnih rješenja (dva, tri, …, konačno ili beskonačno mnogo) onda je on otvoren s obzirom na odgovor (kraj). Na primjer, problemski zadatak s više korektnih rješenja, koji je poznat i kao „open-ended task“. Također, ukoliko cilj zadatka nije jasno postavljen pa je moguće ostvariti više različitih ciljeva, zadatak se smatra otvorenim s obzirom na cilj. Na primjer, takvi su istraživački zadaci. Nadalje, kod autentičnih zadataka ne postoje točni odgovori već se može postići više valjanih odgovora pa se i oni smatraju otvorenim zadacima. Ovi zadaci se obično mogu rješavati na više različitih načina pa se također mogu koristiti za razvoj i otkrivanje kreativnosti učenika.

(3) *Otvorenost koja ovisi o iskazu zadatka*. Ako je zadatak dovoljno složen, a u iskazu zadatka ne postoje smjernice kako doći do rješenja, onda se zadatak smatra otvorenim. S obzirom da se takav zadatak može preformulirati kako bi se osigurale smjernice za rješavanje zadatka, ova karakteristika ne smatra se da je svojstvena samom zadatku već ovisi o načinu na koji je zadatak iskazan.

Jedan zadatak može biti otvoren kroz više aspekata istovremeno. Na primjer, zadaci s više korektnih rješenja obično se mogu riješiti na više različitih načina pa imaju višestruku ulogu u učenju i poučavanja, ali i u vrednovanju znanja.

Primjer 3.3.7. *U sobi se nalazi 10 osoba i svatko od njih se rukovao sa svakim točno jednom. Odredite koliko je ukupno bilo rukovanja.*

Zadatak je povezan s iskustvom i postoji samo jedno rješenje, do kojeg se može doći na više različitih načina pa je to primjer zadatka koji je otvoren s obzirom na metodu.

Primjer 3.3.8: *Točke* $A(4,-4)$, $B(9,6)$, $C(-2,4)$ *i* $D(x,y)$ *vrhovi su romba. Odredite koordinate točke D koja je četvrti vrh romba.*

U ovom se zadatku ne može izravno doći do rješenja primjenom nekog poznatog postupka već zahtjeva mišljenje više razine pa spada u grupu problemskih zadataka. Kako ovaj zadatak ima više mogućih rješenja on je otvoren s obzirom na odgovor. Međutim, s malo vježbe ovaj zadatak može postati rutinski zadatak, ali on je i dalje otvoren s obzirom na odgovor jer je to karakteristika svojstvena zadatku.

Primjer 3.3.9. *Koristeći karton kvadratnog oblika oblikujte kutiju (otvorenu odozgor) maksimalnog volumena.*

U ovom zadatku cilj je jasan (traži se oblikovanje otvorene kutije) pa zadatak nije otvoren s obzirom na cilj. Također, rješenje zadatka je jedinstveno (postoji samo jedan točan odgovor) pa zadatak nije otvoren ni s obzirom na odgovor. Međutim, zadatak je prilično složen, a u iskazu zadatka nema nikakvih potpitanja ili smjernica koje vode prema rješenju pa učenik koji prvi put vidi ovaj zadatak možda neće znati kako započeti. Stoga je ovo primjer zadatka koji je otvoren s obzirom na iskaz.

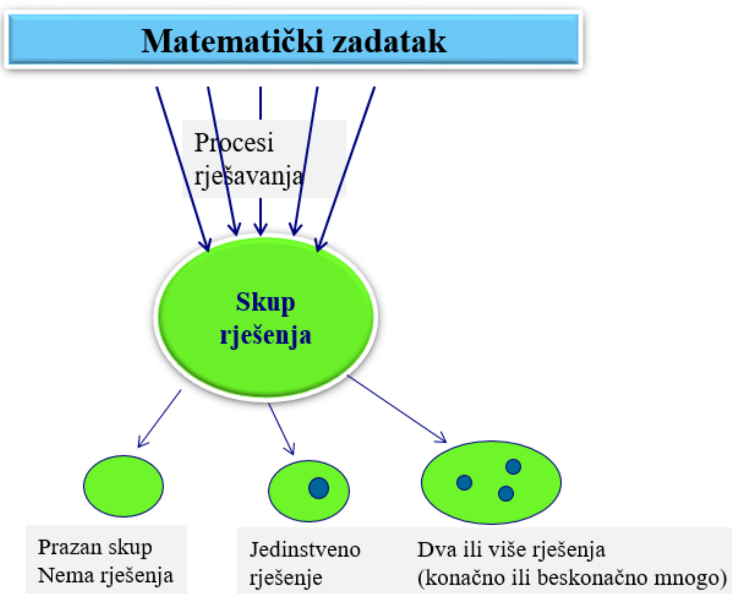
Suprotno od matematički bogatih zadataka koji su zadaci viših kognitivnih zahtjeva, često otvoreni, potiču divergentne aktivnosti itd., zadaci koji nisu matematički bogati su zadaci nižih kognitivnih zahtjeva i obično su *zatvoreni* zadaci. Zatvoreni zadaci su u suprotnosti s otvorenim zadacima: cilj je jasno naveden u iskazu zadatka, imaju samo jedan točan odgovor, metoda za njihovo rješavanje je dobro poznata i moguće ju je uvježbati itd. Na primjer, proceduralni zadaci. Iako, uvijek postoje sive zone (Yeo, 2007).

Među zadacima osnovnoškolske matematike najčešće dominiraju zadaci koji nisu matematički bogati iako uz malo znanja i vještine, oni se mogu obogatiti ovisno o cilju koji se želi postići.

4. Rješenje matematičkog zadatka

Najčešća zadaća učenika u nastavi matematike jest riješiti matematički zadatak. No, što znači riješiti zadatak, što može biti rješenje zadatka te kako riješiti zadatak? Odgovori na ta pitanja razmatraju se u klasi *odredbenih* zadataka.

Pod izrazom *rješenje zadatka* podrazumijeva se matematički objekt koji se traži, a koji udovoljava uvjetima zadatka. S aspekta broja rješenja odredbenog zadatka, zadatak može biti bez rješenja (kada nijedan objekt ne udovoljava uvjetima zadatka), može imati jedno rješenje (zadatak s jedinstvenim rješenjem), ali može imati dva ili više rješenja kojih može biti konačno mnogo (zadatak s više, ali konačno rješenja) ili beskonačno mnogo (zadatak s beskonačno rješenja). U skladu s tim, *riješiti zadatak* znači odrediti sve matematičke objekte koji udovoljavaju uvjetima zadatka (ili reći da takvih objekata nema), odnosno odrediti *skup rješenja* (Slika 11). Korektan odgovor jest onaj odgovor koji obuhvaća sva moguća rješenja.



Slika 11. Zadatak, proces rješavanja i rješenje

Da bi se odredilo *rješenje* zadatka potrebno je pronaći put od zadanih elemenata do cilja (nepoznanice) zadatka. Za proces otkrivanja puta od poznatog do nepoznatog, odnosno za proces traženja odgovarajućeg objekta koji udovoljava uvjetima zadatka koristi se naziv *način rješavanja* ili *proces rješavanja* zadatka.

U svojoj knjizi *Kako ću riješiti matematički zadatak?* Polya razmatra *proces rješavanja* složenog odredbenog matematičkog zadatka u četiri faze: (1) faza razumijevanja, (2) faza stvaranja plana, (3) faza izvršavanja plana i (4) faza osvrta (Polya, 1966, str. 5).

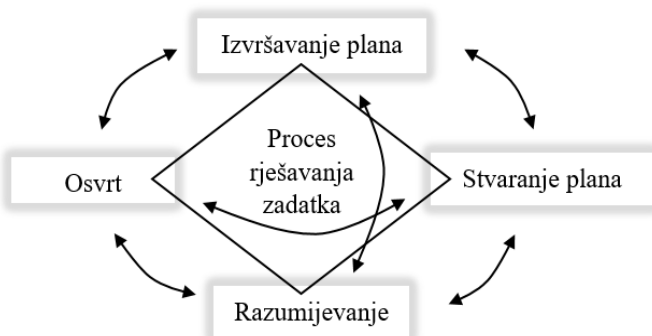
Faza razumijevanja. Zadatak može biti zadan tekstom, vizualnim prikazom ili simboličkim zapisom, a obično je kombinacija više zapisa. Stoga faza razumijevanja započinje čitanjem zadatka u svrhu prepoznavanja glavnih elemenata te stvaranjem osnovne predodžbe o putu prema cilju. Zatim je potrebno steći dublje razumijevanje ponovnim čitanjem i razmišljanjem o mogućim vezama između pojedinih elemenata zadatka u svrhu stvaranja plana puta do rješenja. Ukoliko nije zadan, već na samom početku korisno je izraditi vizualni prikaz u kojem se lakše uočavaju potrebne veze i uvesti oznake svih elemenata koje će se koristiti u simboličkom zapisivanju. Ukoliko je vizualni prikaz zadan potrebno je unutar njega prepoznati potrebne elemente i moguće veze. Već na samom početku treba steći neku procjenu, privremeni odgovor, slutnju o mogućem ishodu, a tek onda započeti sa stvaranjem plana.

Faza stvaranja plana. Nakon čitanja i analiziranja zadane situacije potrebno je povezati zadane elemente s odgovarajućim definicijama, tvrdnjama, pravilima, prisjetiti se sličnog zadatka (ako postoji), metode kojom se rješavao itd. Tijekom tog procesa potrebno je odabrati odgovarajuću strategiju, metode, način zapisivanja, a zatim uočene veze zapisati u formalnom obliku kroz jednadžbu, formulu, graf i dr. Pri tome je važno voditi računa o usklađenosti oznaka u tekstu i vizualnom prikazu kako bi se daljnji proces mogao kontrolirati, a rezultat provjeriti i interpretirati u skladu sa zadanim elementima. Tijekom stvaranja plana važno je stvoriti glavnu ideju kako doći do cilja, što nije uvijek ni brzo ni jednostavno, a ovisi o mnogim faktorima: iskustvu, predznanju, dosjetljivosti, spretnosti, strpljivosti itd.

Faza izvršavanja plana. Nakon čitanja i razumijevanja zadane situacije te mudro odabranih procedura na temelju osmišljenog plana rješavanja faza izvršavanja plana prilično je jednostavna: preostaje pažljivo provesti odabrane postupke i račune do kraja, vodeći računa o jasnom i sistematičnom zapisivanju svih ključnih koraka kako bi se provedeni proces mogao kontrolirati. Provoditi bilo kakve procedure i račune bez analiziranja zadane situacije, prepoznavanja glavnih elemenata te uspostavljanja formalnih veza među svim potrebnim elementima besmisleno je i najčešće osuđeno na neuspjeh.

Faza osvrta. Proces rješavanja zadatka ne završava pukim određivanjem rješenja, već tek kada se napravi osvrt na sve provedeno: ima li dobiveno rješenje smisla, postoji li još neko rješenje, jesu li svi provedeni postupci korektni, postoji li neka druga metoda kojom se može efikasnije doći do rješenja itd. Upravo se kroz refleksiju različitih procesa rješavanja istog zadatka mogu prepoznati različite metode, njihove sličnosti i razlike i na taj način razvijati različite strategije rješavanja zadataka. Strategije usvojene na takav način efikasnije se mogu primijeniti pri rješavanju drugih zadataka.

Iako su ove faze opisane linearno, u praksi se one najčešće ne ostvaruju linearno jer je proces rješavanja zadataka, posebno matematički bogatih zadataka, *naprijed-nazad* proces: kad u nekom dijelu proces rješavanja zapne, dobro je odmah vratiti se korak-dva natrag i ponovno pokušati, a zatim nastaviti dalje i tako redom (Antunović-Piton, B., Baranović, 2022; Slika 12).



Slika 12. Proces rješavanja odredbenog zadatka

Različite vrste zadataka zahtijevaju različite pristupe u rješavanju, ali svaki zadatak koji je postavljen ima neki svoj zahtjev i uvjete. *Riješiti* zadatak znači odgovoriti na taj zahtjev u skladu s postavljenim uvjetima, pri čemu treba razmotriti sve mogućnosti i ustanoviti da drugih nema.

Iako se Polya u svojoj knjizi najviše bavio odredbenim zadacima, slična procedura se može primijeniti i na dokazne zadatke, odnosno pri utvrđivanju istinitosti zadane tvrdnje. Proces dokazivanja zasigurno treba započeti fazom razumijevanja i razlučivanjem glavnih dijelova: pretpostavke (P) i zaključka (Q). Ukoliko je moguće korisno je izraditi i vizualni prikaz unutar kojeg će se vidjeti svi potrebni elementi i moguće veze. Zatim treba osvijestiti definicije, aksiome i teoreme koji su potrebni za uspostavljanje niza zaključaka, a posebno koji je predzadnji zaključak

(Q') iz kojeg će slijediti traženi zaključak (Q), čime je osiguran dobar dio plana. Tek nakon toga slijedi izvođenje niza korektnih logičkih zaključivanja, bilo direktno ili indirektno, na temelju kojih će se utvrditi istinitost zaključak (Q). Konačno, nakon osvrta potrebno je reći što je provedenim procesom utvrđeno.

Opisani proces rješavanja, posebno kognitivno zahtjevnih zadataka, jednako kao i proces utvrđivanja istinitost tvrdnje nije nešto što se uči spontano ili pukim ponavljanjem onoga što je učitelj predstavio. Ti procesi zahtijevaju znanje, vještinu i promišljeno vodstvo učitelja kroz balansiranje različitih vrsta zadataka.

U sljedećem poglavlju, kroz nekoliko odabranih zadataka razmatra se cjeloviti proces rješavanja u svrhu otkrivanja njihovih mogućih potencijala.

5. Didaktički potencijal jednog zadatka

Jedan od načina određivanja potencijala nekog matematičkog zadatka jest kada učitelj proučava proces rješavanja zadatka u svrhu otkrivanja mogućih strategija i metoda rješavanja, kao i potrebnih znanja i vještina koje učenici trebaju imati da bi mogli riješiti taj zadatak. Tijekom tog procesa moguće je uočiti i teškoće na koje učenici mogu naići pri njegovom rješavanju. No, puni didaktički potencijal zadatka dolazi do izražaja tek kada se zadatak predstavi učenicima, a zatim razmatraju njihovi uspješni i neuspješni načini rješavanja. U tom procesu moguće je otkriti njihov način promišljanja i zaključivanja, ali i teškoće na koje su nailazili kao i eventualna pogrešna shvaćanja. Također, kroz različite strategije rješavanja dolazi do izražaja znanje, vještine, snalažljivost, kreativnost i originalnost učenika.

S obzirom da nastavni materijali za matematičko obrazovanje, posebno osnovne i srednje škole, u velikoj mjeri sadrže zadatke nižih kognitivnih zahtjeva, najčešće proceduralnog tipa (izračunaj, zbroji, pomnoži, podijeli, pojednostavni, odredi opseg i sl.), oni se u ovom radu ne razmatraju, osim unutar složenijih zadataka. Uz malo iskustva, dosjetljivosti i vještine, rutinski zadaci koji prevladavaju u nastavnim materijalima mogu se preoblikovati u izazovne problemske, otvorene, istraživačke i dr. zadatke. U nastavku se razmatra potencijal nekoliko takvih zadataka koji u sebi objedinjuju više različitih karakteristika: od jednostavnog zadataka riječima do bogatog matematičkog zadatka.

Učenici nižih razreda osnovne škole rješavaju mnoštvo zadataka u kojima treba odrediti vrijednost aritmetičkog izraza s ciljem da razviju vještinu operiranja s prirodnim brojevima, vode računa o prioritetu računskih operacija i ulozi zagrada. Ali, najčešće su to zadaci oblika *Izračunaj*: $5\cdot(7+8:2+9)$.

Uvođenjem zadatka u kontekst igre s kartama, što je mnogim učenicima blisko, zadatak se može upakirati u problemski zadatak, koji ima jasan cilj, a otvoren je prema načinu rješavanja i prema broju valjanih odgovora koji se mogu postići. S obzirom da danas postoje mnoge vrste karata s brojevima, u radu se može simulirati i igra s odgovarajućim kartama.

Zadatak 5.1. *Koristi se špil od 36 karata (4 boje po 9 karata, Slika 13). Iz špila se izvlači 5 karata. Izvučeni brojevi su znamenke od kojih treba formirati brojevni izraz čija je vrijednost 100. Svaki broj se treba iskoristiti i to samo jednom. Može se koristiti bilo koja kombinacija od četiri računske operacije (+, -, ·, :) i zagrade, brojevi se mogu spajati tako da čine dvoznamenkasti broj.* (Izvor: Baranović, 2018)

Slika 13. Igraće karte s brojkama

Zadatak postavljen na ovaj način svojim iskazom potiče na veći angažman i promišljanje jer učenici sami trebaju kreirati aritmetički izraz s odgovarajućom vrijednošću. Da bi to ostvarili, trebaju provesti mnoštvo pokušavanja, računanja, analiziranja i sintetiziranja. Ako pri tome sami izvlače karte iz špila, imaju osjećaj kontrole nad procesom što ih dodatno motivira da samostalno pronađu rješenje. Ukoliko se zadatak realizira u razredu, može se postići i natjecateljski efekt. Ako se omogući rasprava o načinima dolaska do rješenja, mogu se uočiti i različite strategije, način kako učenici razmišljaju i kako primjenjuju svoja znanja i vještine operiranja s prirodnim brojevima. Na primjer, neka su izvučene sljedeće karte: 5, 6, 4, 2 i 3.

Strategija 1. Učenicima je svojstveno da nasumično pokušavaju slagati izraz množenjem i zbrajanjem brojeva s izvučenih karata. Prirodno je da započnu s najvećim brojevima kako bi se što prije približili broju 100, a zatim od preostalih brojeva dopunjuju ono što nedostaje.

Pokušaj 1: Množenjem brojeva 5 i 6 dobiva se $5 \cdot 6 = 30$, a množenjem broja 30 s 3 dobiva se $30 \cdot 3 = 90$, pa s 2 i 4 treba dobiti 10 koji nedostaje. No, to nije moguće ni zbrajanjem ni množenjem.

Pokušaj 2: Množenjem brojeva 6 i 4 dobiva se $6 \cdot 4 = 24$ i dodavanjem broja 1 dobiva se 25 $24 + (3 - 2) = 24 + 1 = 25$, te preostaje broj 5. No, množenjem broja 25 s 5 premašuje se 100.

Pokušaj 3: Množenjem brojeva 5 i 4 dobiva se 20, $5\cdot 4=20$, a od preostalih brojeva 6, 3 i 2 dobiva se 5, $6-3+2=5$, pa se množenjem brojeva 20 i 5 dobiva 100, $20\cdot 5=100$. Konačno, traženi izraz jest:

$$5\cdot 4\cdot(6-3+2)=100\,.\blacklozenge$$

Strategija 2. S obzirom da se od dobivenih brojeva mogu graditi dvoznamenkasti brojevi, neki učenici će započeti s najvećim dvoznamenkastim brojem i sa preostalim brojevima pokušati dobiti razliku koja nedostaje do 100.

Pokušaj 1: Najveći dvoznamenkasti broj koji se može postići od izvučenih brojeva jest broj 65 i do 100 nedostaje 35. Od preostalih brojeva 4, 3 i 2 može se dobiti broj $34+2=36$, što premašuje 35 za 1.

Pokušaj 2: Nastavi se nizati kombinacije dvoznamenkastih brojeva.

Dvoznamenkasti broj	Do 100 nedostaje	Preostale znamenke	Mogući izraz
64	36	5, 3, 2	35 + 2 = 37 ne odgovara
63	37	5, 4, 2	25 + 4 = 29 ne odgovara
62	38	5, 4, 3	43 – 5 = 38 odgovara

Konačno, traženi izraz je: $62+43-5=100\,.\blacklozenge$

Strategija 3. Proces može započeti analizom broja 100. Kako se broj 100 može dobiti množenjem dvaju brojeva:

$$\begin{aligned}100&=2\cdot 50\\&=4\cdot 25\\&=5\cdot 20\end{aligned}$$

a brojevi 2, 4 i 5 već postoje na izvučenim kartama, preostaje vidjeti mogu li se od preostalih brojeva dobiti brojevi 50, 25 i 20 redom. Time se problem pojednostavnjuje.

Pokušaj 1: Nakon izuzimanja broja 2, preostaju 5, 6, 4 i 3 od kojih treba dobiti 50. Kako je $50=5\cdot 10$, preostaje od brojeva 6, 4 i 3 dobiti 10, a to nije moguće. Ili, 5 i 6 daju broj 56 pa treba oduzeti 6, ali to nije moguće postići s brojevima 4 i 3. Nakon nekoliko pokušaja, uvijek se dobiva ili više ili manje od 50.

Pokušaj 2: Nakon izuzimanja broja 4, preostaju 5, 6, 3 i 2 od kojih treba dobiti 25. Kako je $25 = 5 \cdot 5$, preostaje od brojeva 6, 3 i 2 dobiti 5, što je moguće kao $6 - 3 + 2$ ili $6 - (3 - 2)$. Konačno, traženi izraz jest:

$$4 \cdot 5 \cdot (6 - 3 + 2) = 100 \text{ ili}$$

$$4 \cdot 5 \cdot [6 - (3 - 2)] = 100 .$$

Pokušaj 3: Nakon izuzimanja broja 4, netko bi od preostalih brojeva 5, 6, 3 i 2 broj 25 mogao dobiti na sljedeći način $3 \cdot 6 + 2 + 5$ pa bi konačni izraz bio:

$$4 \cdot (3 \cdot 6 + 2 + 5) = 100 \text{. Itd.} \blacklozenge$$

Iz ovog primjera vidljivo je koliko se izvrši različitih računanja u pozadini prije dolaska do odgovarajuće vrijednosti. No, s obzirom na neizvjesnost koje karte će se izvući, učitelj treba biti vješt u provjeravanju učeničkih rješenja i usmjeravanju učenika kada zapnu tijekom rada jer nemogućnost dolaska do rješenja za neke učenike može biti i frustrirajuće, ali istodobno i dobra vježba strpljivosti i ustrajnosti.

Također, ne vode sve strategije jednako brzo i efikasno do rješenja pa je korisno razgovarati o načinima rješavanja, a kada učenici postave više različitih rješenja korisno je razgovarati o ulozi zagrada i ekvivalentnosti dobivenih izraza.

Učenici viših razreda osnovne škole rješavaju brojne zadatke s razlomcima, bilo da su izrazi već zadani ili je zadatak zadan riječima pa sami trebaju postaviti izraz i zatim primijeniti odgovarajući proceduru. Također, bave se rješavanjem raznih vrsta linearnih i kvadratnih jednadžbi te sustava s dvjema jednadžbama. Ponekad zadaci na prvu mogu izgledati čisti proceduralni ili „zapakirani" zadatak riječima, ali mogu biti i više od toga. Na primjer, sljedeći zadatak se može koristiti u svrhu vrednovanja strategija pri rješavanju sustava dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama.

Zadatak 5.2. *Zbroj dvaju brojeva je 12, a umnožak tih brojeva je 4. Odredite zbroj recipročnih vrijednosti tih brojeva.* (Izvor: Posamentier i Krulik, 2008, str. 20)

Ovaj se zadatak može riješiti na dva bitno različita načina (Posamentier i Krulik, 2008): jedna strategija zahtjeva poznavanje metoda za rješavanja sustava dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama, rješavanje kvadratne jednadžbe, zbrajanje razlomaka te racionaliziranje nazivnika, dok druga strategija zahtjeva samo zbrajanje algebarskih razlomaka. Prema opisanome, zadatak spada u grupu odredbenih zadataka proceduralnog tipa koji je zapakiran u „problem riječima“, ali je otvorenog tipa jer se može riješiti na više načina.

Zadatak je rješavalo 52 studenata učiteljskog studija na ispitu iz Matematike 1. Svi osim jednog studenta zadatak su rješavali prvom strategijom, gotovo na isti način.

Strategija 1: Studenti odmah postave sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama, u kojima nepoznanice *x* i *y* predstavljaju brojeve opisane tekstom zadatka te rješenje tako postavljenog sustava određuju metodom supstitucije. Pri tome najčešće izraz za *y* iz prve jednadžbe supstituiraju umjesto nepoznanice *y* u drugoj jednadžbi. Ukoliko tijekom uvrštavanja, množenja i sređivanja algebarskog izraza ne naprave grešku, dobivaju kvadratnu jednadžbu po nepoznanici *x*.

$$\begin{array}{l} x+y=12 \Rightarrow y=12-x \\ \underline{x\cdot y=4 \qquad\qquad\qquad} \\ x(12-x)=4 \\ 12x-x^2=4 \\ x^2-12x+4=0 \end{array}$$

Kvadratnu jednadžbu najčešće rješavaju primjenom formule te nakon vještog uvrštavanja, djelomičnog korjenovanja i skraćivanja, dobivaju njezina dva realna rješenja, koja su za njih vrlo „odbojnog izgleda“.

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-16}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{128}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{12\pm 8\sqrt{2}}{2}$$
$$x_{1,2}=6\pm 4\sqrt{2}$$
$$x_1=6-4\sqrt{2},\, x_2=6+4\sqrt{2}$$

Uvrštavanjem vrijednosti dobivenih za nepoznanicu x u izraz koji se koristio na početku za nepoznanicu y, $y = 12 - x$, studenti dalje određuju vrijednosti i druge nepoznanice:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 12 - \left(6 - 4\sqrt{2}\right) = 6 + 4\sqrt{2} \\
y_2 &= 12 - \left(6 + 4\sqrt{2}\right) = 6 - 4\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

S obzirom da su rješenja simetrična, dolaze do zaključka da sustav kojeg su postavili na početku ima jedinstveno rješenje:

$$
(x, y) = \left(6 - 4\sqrt{2}, 6 + 4\sqrt{2}\right).
$$

Nakon određivanja rješenja sustava slijedi određivanje zbroja njihovih recipročnih vrijednosti. Dio studenata provodi najprije racionalizaciju nazivnika, a zatim zbrajanje:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{6 - 4\sqrt{2}} + \frac{1}{6 + 4\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{6 - 4\sqrt{2}} \cdot \frac{6 + 4\sqrt{2}}{6 + 4\sqrt{2}} + \frac{1}{6 + 4\sqrt{2}} \cdot \frac{6 - 4\sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{2}} \\
&= \frac{6 + 4\sqrt{2}}{36 - 32} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{36 - 32} \\
&= \frac{6 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{12}{4} \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Drugi dio studenata ide direktno na zbrajanje razlomaka jer se množenjem njihovih nazivnika dobiva cijeli broj u nazivniku pa prethodna racionalizacija pojedinačnih razlomaka nije potrebna:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= \frac{1}{6-4\sqrt{2}}+\frac{1}{6+4\sqrt{2}} \\
&= \frac{6+4\sqrt{2}+6-4\sqrt{2}}{\left(6-4\sqrt{2}\right)\left(6+4\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{12}{36-32} \\
&= \frac{12}{4} \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Međutim, postupak zbrajanja recipročnih vrijednosti nepoznanica x i y većina studenata nije dovela uspješno do kraja, tek 5 od 52 studenata, odnosno 1% onih koji su pisali ispit. Naime, pokazalo se da je za ovu grupu studenata zbrajanje ovako dobivenih razlomaka složena procedura unutar koje rade razne greške čime proceduru dodatno zakompliciraju i nisu je u mogućnosti „razmrsiti“.◆

Strategija 2: Druga strategija zasniva se na metodi rada unatrag: prvo se analizira zbroj recipročnih razlomaka, a zatim se koristi metoda supstitucije.

Naime, zbrajanjem recipročnih vrijednosti dvaju brojeva x i y dobiva se razlomak kojemu je brojnik zbroj ovih brojeva, a nazivnik njihov umnožak. Sada se supstitucija zadanih vrijednosti zbroja i umnoška uvodi direktno u dobiveni razlomaka iz čega se dobiva tražena vrijednost.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{12}{4}=3.$$

Ova elegantna strategija zahtjeva analitičko i sintetičko mišljenje što se ne može naučiti pukom reprodukcijom pravila već primjenom metode analize i sinteze u različitim situacijama. Studenti koji nemaju razvijene ove oblike mišljenja obično kažu da se radi o „trik“ rješenju, posebno što su mnogi od njih navikli da pri rješavanju sustava dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama najprije odrede vrijednosti tih nepoznanica, a onda rade s njima dalje ono što je potrebno. No, to u ovom slučaju nije bilo potrebno. Ovu strategiju proveo je samo jedan student od 52 studenta koji su pisali ispit. ◆

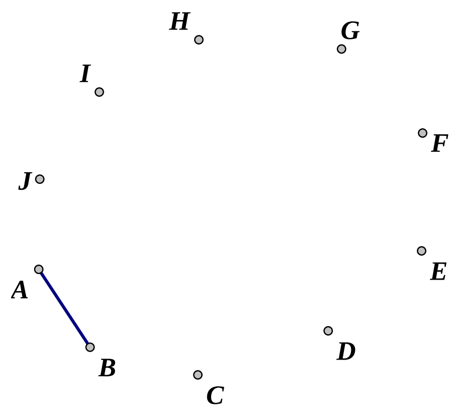
U usmenom razgovoru student je komentirao da je slične zadatke već rješavao pa je odmah znao što treba napraviti iako je bio pomalo skeptičan da će dobiti sve bodove ako tako riješi zadatak jer je zadatak riješio u „dvi crte“. Ovim se samo potvrđuje da se zadaci ovog tipa mogu uvježbati i da jedan te isti zadatak jednoj grupi studenata može biti nepremostivi problem, dok je drugima prilično jednostavna procedura. Tako ovaj zadatak može biti istovremeno i jednostavan i složen: jednostavan za one koji su vješti u radu s razlomcima i koriste drugu strategiju, a složen za one koji nisu vješti u radu s razlomcima i koriste prvu strategiju.

Primjenom prve strategije, studenti koji su vješti u potrebnom proceduralnom rješavanju, ovaj zadatak mogu riješiti kao rutinski zadatak na nižoj razini matematičkog mišljenja, dok primjena druge strategije zahtjeva više razine mišljenja iako se i ona može uvježbati do određene razine. U prvom slučaju, rješavanje zadatka primjenom prve strategije može biti prilično frustrirajuće za one studente koji nemaju razvijene potrebne proceduralne vještine. Ali, rad s ovakvim zadacima na nastavi matematike može služiti kao podloga da se ukaže na postojanje i drugih strategija koji na elegantan i brz način dovode do rješenja.

Zadatak 5.3. *U sobi se nalazi 10 osoba i svatko od njih se rukovao sa svakim točno jednom. Odredite koliko je ukupno bilo rukovanja.* (Izvor: Posamentier i Krulik, 2008, str. 11)

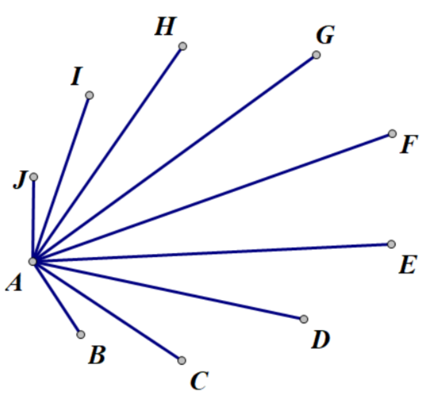
Ovaj problemski zadatak otvorenog tipa Posamentier i Krulik (2008) koriste kao zadatak koji je dobar za upoznavanje s različitim strategijama. S jedne strane, zadatak na prvu izgleda jednostavan i motivirajući s obzirom da je blizak realnom životnom iskustvu. No, onome tko se s ovim tipom zadatka susreće prvi put može biti problem jer ne zna od kuda bi krenuo. S druge strane, zadatak se može riješiti na više različitih načina i korištenjem različitih reprezentacija pa je dobra podloga za uspoređivanje različitih metoda u svrhu otkrivanja optimalnog procesa rješavanja. Također, zadatak se može i proširivati na 100, 200, … osoba i na taj način dovesti do stvaranja generalizacije, što je bitna odlika matematičkog mišljenja.

Strategija 1: Ova strategija zasniva se na izradi vizualnog prikaza koji predstavlja rukovanje: osobe se ne prikazuju u stvarnom obliku već se apstrahiraju tako da se svaka od 10 osoba predstavi točkom, koja ima svoje ime: *A, B, C, D, E, F, G, H, I* i *J*. Ostvareno rukovanje može se prikazati dužinom, npr. dužina $\overline{AB}$ znači da je osoba *A* izvršila rukovanje s osobom *B* (kraće: rukovanje *AB*), ali i da je osoba *B* izvršila rukovanje s osobom *A* (kraće: rukovanje *BA*). S obzirom da jedna dužina između dviju točaka predstavlja isto rukovanje, pri prebrojavanju treba voditi računa da se to rukovanje ne broji dva puta. Također, korisno je točke posložiti tako da ne budu kolinearne jer onda prikaz neće biti pregledan kao u slučaju kada se polože tako da tvore kružni oblik (Slika 14).

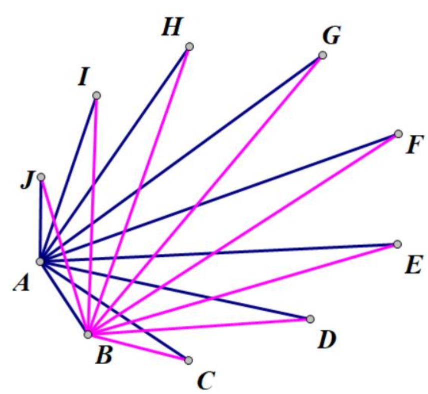


Slika 14. Vizualni prikaz osoba i rukovanja

Prebrojavanje rukovanja vrši se postupno, za svaku osobu posebno. Prva osoba može biti ona koja je predstavljena točkom *A*. S obzirom da je u sobi 10 osoba, prva osoba se mogla rukovati sa svakom od preostalih 9 osoba. Nakon toga, druga osoba koja je predstavljena točkom *B* mogla se rukovati sa svakom od preostalih 8 osoba. Naime, rukovanje *BA* se ne broji jer se brojalo rukovanje *AB* (Slika 15).



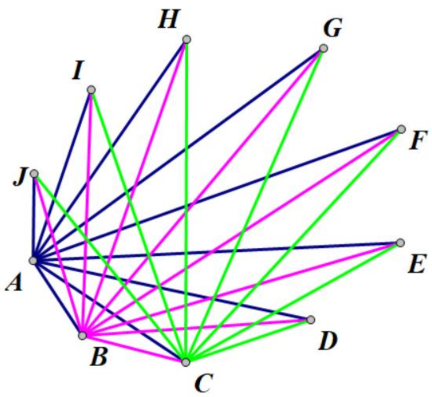
Rukovanje osobe *A*



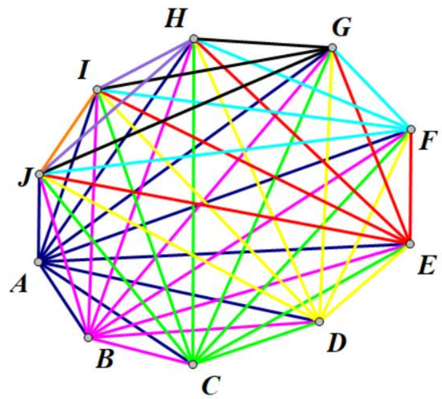
Rukovanje osobe *B*, nakon osobe *A*

Slika 15. Vizualni prikaz rukovanja osobe *A* i osobe *B*

Dalje, nakon prve dvije osobe, treća osoba koja je predstavljena točkom *C* mogla se rukovati sa svakom od preostalih 7 osoba, četvrta osoba predstavljena točkom *D* mogla se rukovati sa svakom od preostalih 6 osoba i tako redom. Kada se dođe do pretposljednje osobe koja je predstavljena točkom I, može se uočiti da preostaje još samo jedno rukovanje s osobom koja je predstavljena točkom J (Slika 16).



Rukovanje osobe C, nakon osobe A i B



Sva rukovanja

Slika 16. Vizualni prikaz svih rukovanja

Konačno, zbroje se sva uočena rukovanja između svih 10 osoba te se dobiva da je moguće ostvariti ukupno 45 rukovanja, pod uvjetom da se svatko od njih rukovao sa svakim točno jednom:

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45.$$

Određivanje ukupnog broja rukovanja za manji broj osoba nije problem, ali može postati problem kada se radi prebrojavanje za 100, 1000, 10000 itd. osoba. U tom slučaju, potrebno je uočiti obrazac prebrojavanja i njega primijeniti za određivanje ukupnog zbroja svih rukovanja. S obzirom da se ovdje radi o zbroju svih prirodnih brojeva do broja koji je za 1 manji od ukupnog broja osoba, za određivanje ukupnog broja rukovanja može se primijeniti Gaussova dosjetka za zbroj prvih n prirodnih brojeva:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Ukoliko je u sobi bilo 100 osoba, primjenom opisanog postupka dobiva se da je ukupan broj rukovanja:

$$99+98+97+\ldots+3+2+1=\frac{99\cdot 100}{2}=4950.$$

Konačno, ukupan zbroj svih rukovanja između n osoba je:

$$\left(n-1\right)+\left(n-2\right)+\left(n-3\right)+\ldots+3+2+1=\frac{\left(n-1\right)\cdot n}{2}.\blacklozenge$$

Strategija 2: Slično prethodnom prebrojavanju, do ukupnog broja rukovanja može se doći metodom umnoška.

Ako se u sobi nalazi 10 osoba, svaka od njih se može rukovati sa preostalih 9 osoba, što je ukupno 10 · 9 rukovanja. No, u tom slučaju svako rukovanje se brojalo dva puta (rukovanje *AB* i rukovanje *BA* je rukovanje između istih osoba) pa još sve treba podijeliti s 2. Konačno, ukupan broj rukovanja je 90 : 2 = 45.

Ako se radi o 100 osoba, ukupan broj rukovanja je $\left(100\cdot 99\right):2=4950$. Itd. Konačno, ukupan zbroj svih rukovanja između *n* osoba je: $n\cdot\left(n-1\right):2.\blacklozenge$

Strategija 3: Pri ispitivanju međusobnih odnosa između dviju varijabli može se koristiti sustavno ispisivanje i povezivanje. U ovom slučaju, može se koristiti tablica u kojoj su stupci i redci osobe koje se rukuju, a svako polje unutar tablice je rukovanje između odgovarajućih osoba. Prebrojavanje primjenom metode tablice je sada prilično jednostavno (Tablica 1).

Tablica 1: Ispitivanje rukovanja među osobama

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
A	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
B		-	+	+	+	+	+	+	+	+
C			-	+	+	+	+	+	+	+
D				-	+	+	+	+	+	+
E					-	+	+	+	+	+
F						-	+	+	+	+
G							-	+	+	+
H								-	+	+
I									-	+
J										-

Kako se osoba ne rukuje sa samom sobom, odmah se mogu isključiti dijagonalna polja. Nadalje, ako se osoba *A* rukovala s osobom *B*, onda se rukovanje osobe *B* s osobom *A* isključuje i tako redom. To znači da se osoba *A* rukovala s 9 osoba, osoba *B* sa 8 osoba, osoba *C* sa 7 osoba itd., pa je ukupan broj rukovanja:

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45.$$

No, prebrojavanje unutar tablice može se vršiti i na sljedeći način: Tablica 10 x 10 je veličine 100 polja, što je ukupno 100 rukovanja. Kako je na dijagonali njih 10, oni se isključuju jer se nitko ne rukuje sam sa sobom, što je ukupno 90 rukovanja. Preostala rukovanja računala su se dva puta pa prethodni broj treba podijeliti s dva što daje $90:2=45$ rukovanja, odnosno:

$$(100-10):2=45.$$

Općenito, ukupan zbroj svih rukovanja između *n* osoba je: $(n \cdot n - n):2$, odnosno: $n \cdot (n-1):2$.◆

Strategija 4: Strategija koja se koristi sustavnim zapisivanjem u tablici može se koristiti i na način da se uočava obrazac promjene. U prvom stupcu upisuje se broj osoba u sobi, počevši od 1, a u drugom stupcu broj rukovanja jedne osobe s preostalim osobama u sobi. U trećem stupcu zbrajaju se sva ostvarena rukovanja za ukupan broj osoba u sobi, a u zadnjem stupcu uočava se pravilo koje povezuje sva tri stupca.

Tablica 2: Uočavanje obrasca promjene

Broj osoba u sobi	Broj rukovanja jedne osobe	Ukupan broj svih rukovanja	Pravilo
1	0	0	$(1 \cdot 0):2=0$
2	1	0 + 1 = 1	$(2 \cdot 1):2=1$
3	2	0 + 1 + 2 = 3	$(3 \cdot 2):2=3$
4	3	0 + 1 + 2 + 3 = 6	$(4 \cdot 3):2=6$
…	…	…	…
9	8	0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36	$(9 \cdot 8):2=36$
10	9	0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45	$(10 \cdot 9):2=45$

Primjenjujući isto pravilo za rukovanje između *n* osoba dobiva se: $n\cdot(n-1):2$.◆

Kada se jedan te isti problem s učenicima rješava na više različitih načina, osigurava im se mogućnost da upoznaju i razvijaju različite strategije, da povezuju različita znanja, da kombiniraju više različitih strategija i kreiraju novu strategiju itd. Osim toga, učenicima se daje poruka da je proces rješavanja i traženje efikasnog puta puno važniji od samog konačnog rješenja. Jer, kroz proces istraživanja, uočavanja pravilnosti i postavljanja zakonitosti učenici koriste više misaone procese i stvaralačke aktivnosti te razvijaju više oblike matematičkog mišljenja.

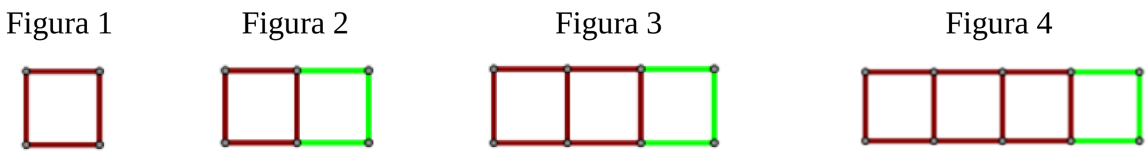
Zadatak 5.4. *Zadan je niz figura oblikovanih od šibica. Na slici 17 prikazane su prve tri figure toga niza* (Izvor: Thornton, 2001, str 251)

Slika 17. Niz figura od šibica

a) *Skicirajte sljedeću figuru u nizu.*
b) *Odredite koliko je šibica potrebno za oblikovanje 30. i 100. figure u nizu na prikazani način. Opišite svoj postupak prebrojavanja.*
c) *Odredite opće pravilo po kojem se može odrediti ukupan broj šibica od kojih je sastavljena bilo koja figura u nizu.*
d) *Može li neka figura u nizu biti sastavljena od točno 2023 šibice. Objasnite.*

Ovaj zadatak je zadan u formi zadatka s vođenim otkrivanjem, ali može biti zadan i kao problemski, istraživački, kontekstualni zadatak itd. Zadatak se može koristiti s različitim uzrastom učenika, a ovisno o uzrastu i s različitom svrhom: za razvoj vizualnog, algebarskog ili funkcijskog mišljenja. Također, može se rješavati na različite načine, pri čemu je efikasno koristiti metodu tablice u kombinaciji s vizualnim prikazom.

Razvoj vizualnog i algebarskog mišljenja: Radi efikasnijeg crtanja, umjesto šibica, mogu se crtati dužine. Uspoređivanjem dviju susjednih figura može se uočiti kako od prethodne nastaje sljedeća figura (Slika 18):



Slika 18. Proces 1. oblikovanja figura u nizu

- prva figura je u obliku kvadrata i sastoji se od 4 šibice
- druga figura je u obliku dva spojena kvadrata i sastoji se od 7 šibica, a nastala je dodavanjem 3 novih šibica na prvu figuru (4 + 3)
- treća figura je u obliku tri spojena kvadrata i sastoji se od 10 šibica, a nastala je dodavanjem 3 novih šibica na drugu figuru (7 + 3)
- to znači da će četvrta figura biti u obliku četiri spojena kvadrata i sastojat će se od 13 šibica, a nastat će dodavanjem 3 novih šibica na treću figuru (10 + 3). Itd.

Proces prebrojavanja i uočavanje obrasca ponavljanja pregledno se može zapisati u tablici pridruživanjem odgovarajućih numeričkih vrijednosti (Tablica 3).

Tablica 3. Prvi način prebrojavanja šibica zadanih figura

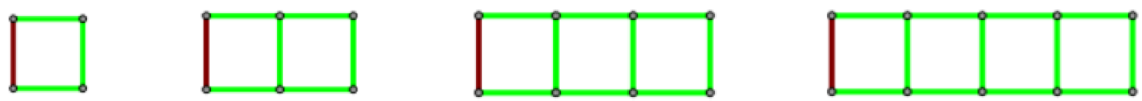
Broj figure n	Broj šibica S	Proces dodavanja	Pravilo
1	4	4	$4 + 0 \cdot 3$
2	7	4 + 3	$4 + 1 \cdot 3$
3	10	7 + 3 = 4 + 3 + 3	$4 + 2 \cdot 3$
4	13	10 + 3 = 4 + 3 + 3 + 3	$4 + 3 \cdot 3$
…	…		
30	91		$4 + \mathbf{29} \cdot 3$
100	301		$4 + \mathbf{99} \cdot 3$
…	…		
$\boldsymbol{n}$			$4 + \mathbf{(\boldsymbol{n} - 1)} \cdot 3$

Raspisivanjem uzastopnog dodavanja po tri šibice za izgradnju svake sljedeće figure uočava se pravilo: u 2. figuri jedan put su dodane 3 šibice na polazne 4 šibice, u 3. figuri dva su puta dodane po 3 šibice na polazne 4 šibice, u 4. figuri tri su puta dodane po 3 šibice na polazne 4 šibice i tako redom. To znači da će u 30. figuri na polazne 4 šibice biti 29 puta dodane po 3 šibice, a u 100.

figuri će se na polazne 4 šibice dodati 99 puta po 3 šibice. Konačno, u *n*. figuri će se na polazne 4 šibice dodati (*n* – 1) puta po 3 šibice pa je ukupan broj šibica *S* u *n*. figuri:

$$S_n = 4 + (n-1)\cdot 3\,.$$

Promatranjem zadanog niza figura mogu se uočiti i drugi načini prebrojavanja ukupnog broja šibica. Na primjer, ako dodavanje po tri šibice započne od prve figure (Slika 19), uočava se drugo pravilo (Tablica 4).



Slika 19. Proces 2. oblikovanja figura u nizu

- u prvoj figuri na jednu šibicu dodane su 3 šibice
- u drugoj figuri na jednu šibicu dodano je 6 šibica, tj. 2 puta po 3 šibice
- u trećoj figuri na jednu šibicu dodano je 9 šibica, tj. 3 puta po 3 šibice
- to znači da će se u četvrtoj figuri dodati 12 šibica, odnosno 4 puta po 3 šibice, itd.

Nastavljanjem ovog postupka, jednostavno se otkriva opće pravilo za ukupan broj šibica *S* u *n*. figuri: na jednu šibicu dodat će se n puta po 3 šibice, odnosno:

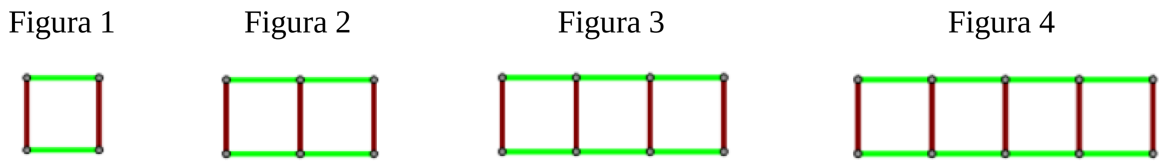
$$S_n = 1 + n\cdot 3\,.$$

Tablica 4. Drugi način prebrojavanja šibica zadanih figura

Broj figure n	Broj šibica S	Proces dodavanja	Pravilo
1	4	1 + 3	1 + 1 · 3
2	7	1 + 6 = 1 + 3 + 3	1 + 2 · 3
3	10	1 + 9 = 1 + 3 + 3 + 3	1 + 3 · 3
4	13	1 + 12 = 1 + 3 + 3 + 3 + 3	1 + 4 · 3
…	…		
30	91		1 + **30** · 3
100	301		1 + **100** · 3
…	…		
n			1 + ***n*** · 3

Prethodna dva pravila na prvi pogled mogu izgledati različita, ali se njihovim sređivanjem dobiva pravilo istog oblika: $S_n = 3n + 1$. Ako se ovaj zadatak koristi u procesu poučavanja, ovo je prikladan trenutak za raspravu o ekvivalentnosti algebarskih izraza.

Treći način prebrojavanja može se zasnivati na prebrojavanju ukupnog broja vodoravnih i vertikalnih šibica (Slika 20), što dovodi do novog oblika pravila za ukupan broj šibica figure.



Slika 20. Proces 3. oblikovanja figura u nizu

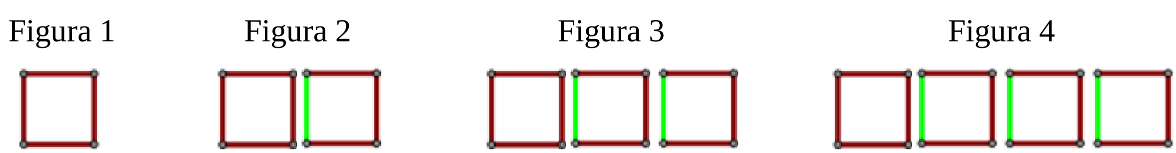
- u 1. figuri su 2 vertikalne i 2 horizontalne šibice
- u 2. figuri su 3 vertikalne i 2 puta po 2 horizontalne šibice
- u 3. figuri su 4 vertikalne i 3 puta po 2 horizontalne šibice
- to znači da će se u 4. figuri biti 5 vertikalnih i 4 puta po 2 horizontalne šibice, itd.

Nastavljanjem ovog postupka može se zaključiti da će u *n*. figuri biti $(n + 1)$ vertikalna šibica i *n* puta po 2 šibice, odnosno opće pravilo za ukupan broj šibica *S* u *n*. figuri jest:

$$S_n = (n+1) + n \cdot 2$$

što je također ekvivalentan izraz prethodno dobivenim izrazima.

Četvrti način prebrojavanja može se zasnivati na prebrojavanju ukupnog broja šibica po kvadratnim oblicima i oduzeti one šibice koje su se brojale više puta zbog preklapanja (Slika 21).



Slika 21. Proces 4. oblikovanja figura u nizu

- u 1. figuri su 4 šibice
- u 2. figuri su 2 puta po 4 šibice i 1 šibica manje zbog preklapanja

- u 3. figuri su 3 puta po 4 šibice i 2 šibice manje zbog preklapanja
- to znači da će se u 4. figuri biti 4 puta po 4 šibice i 3 šibice manje zbog preklapanja, itd.

Nastavljanjem ovog postupka, može se zaključiti da će u n. figuri biti n puta po 4 šibice i $(n - 1)$ šibica manje zbog preklapanja, odnosno ukupan broj šibica S u n. figuri jest:

$$S_n = n \cdot 4 - (n - 1)$$

što je također ekvivalentan izraz prethodno dobivenim izrazima.

Prema opisanim strategijama prebrojavanja može se uočiti da upravo vizualni prikazi omogućavaju i usmjeravaju percepciju u različitim smjerovima što u konačnici dovodi do različitih oblika istog pravila. Bogatstvo ovog zadatka postiže se upravo u povezivanju različitih reprezentacija, vizualnih, numeričkih i algebarskih, u svrhu izvođenja generalizacije, što je odlika matematičkog mišljenja.◆

S obzirom da ovaj zadatak osigurava prirodno okruženje unutar kojeg se može uspostaviti veza između dviju promjenjivih veličina, on je dobra podloga i za funkcijsko povezivanje dviju varijabli. Mijenjanjem iskaza zadatka, sa ili bez vođenog otkrivanja, zadatak se može preoblikovati na sljedeći način:

Zadatak 5.5. *Odredite funkciju koja je predstavljena nizom figura na Slici 17.*

Bez vođenog otkrivanja zadatak postaje otvoreni problemski zadatak, koji ima jedinstveno rješenje, a do kojeg se može doći na različite načine. Ovako postavljen zadatak, osim navedenog, može služiti i za razvoj funkcijskog mišljenja.

Razvoj funkcijskog mišljenja. Rješavanjem ovako postavljenog zadatka učenicima se osigurava prirodno okruženje unutar kojeg mogu postupno razvijati funkcijsko mišljenje: prvo uočavaju koje varijable se mijenjaju (broj figure i broj šibica unutar figure), a zatim kako promjena jedne varijable utječe na promjenu druge varijable (broj šibica ovisi o tome koja je figura po redu). Kada se jednom ustanovi koja funkcija je prikazana zadanim nizom, mogu se dalje proučavati svojstva funkcije i uspoređivati je s drugim funkcijama iz iste klase (npr. linearne funkcije s jednakim koeficijentom).

Koristeći već opisane strategije prebrojavanja, može se zaključiti da zadani niz predstavlja linearnu funkciju S kojoj su domena i kodomena skup prirodnih brojeva, $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, a koja je definirana pravilom $S(n)=3n+1$. Dakle, argumenti ove funkcije odgovaraju rednom broju figure, a vrijednosti funkcije broju šibica u točno određenoj figuri po redu. Na primjer, $S(4)=13$ znači da je četvrta figura po redu oblikovana od 13 šibica.

U skladu s opisom funkcije, zadnje pitanje zadatka *Može li neka figura u nizu biti sastavljena od točno 2023 šibice?*, moglo bi glasiti: *Može li vrijednost funkcije biti 2023?*, odnosno *Za koji argument domene funkcija poprima vrijednost 2023?*.

Postavljanjem jednakosti i sređivanjem, dobiva se:

$$
\begin{aligned}
&S(n)=2023\\
&3n+1=2023\\
&3n=2022\\
&n=674
\end{aligned}
$$

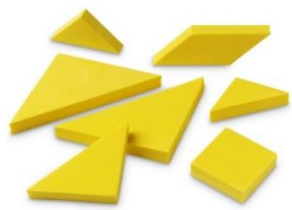
Drugim riječima, 674. figura po redu biti će oblikovana od točno 2023 šibice.

Iskaz ovog zadatak može se mijenjati u različitim smjerovima i na taj način osiguravati različite izazove učenicima: npr. mijenjanjem oblika figure postizati različite vrste funkcija (linearne, kvadratne i dr.) ili npr. osmisliti niz figura koji će predstavljati funkciju sa zadanim pravilom. Također, osim oblika figura može se mijenjati i kontekst. Umjesto da se prebrojavaju elementi od kojih je figura sastavljena, može se određivati opseg, ploština ili volumen odgovarajuće figure u nizu i na taj način stvarati funkcionalne veze među različitim konceptima.◆

Rad s figurama omogućava da se u nastavu uvedu i razna didaktička sredstva koja mogu poslužiti za istraživanje i otkrivanje matematičkih koncepata i ideja te postavljanje matematičkih zakonitosti. Na primjer, korištenje slagalice tangram može se koristiti u svrhu otkrivanja geometrijskih koncepata i razvoj geometrijskog mišljenja, slično i kao korištenje geoploče, a danas su razna didaktička sredstva dostupna i u digitalnoj verziji.

Korištenje jednog didaktičkog sredstva omogućava izgradnju niza zadataka, koji su različiti, a opet međusobno povezani čime se osigurava prirodno okruženje za povezivanje različitih koncepata i ideja. Njihove mogućnosti postaju neizmjerne tek kada se koriste u praksi, ali da bi ih učitelj uveo u nastavu matematike i sam prije toga treba biti vješt u njihovom korištenju. Aktivnosti s didaktičkim sredstvom treba uvoditi postupno, promišljeno i svrhovito. U početku je potrebno upoznati njihova svojstva, a zatim za otkrivanje raznih koncepata i ideja. (Kavajin i Baranović, 2019a, 2019b).

Zadatak 5.6: *Korištenjem likova slagalice tangram (Slika 22) prikazati trokut. Rješenje prikazati u kvadratnoj točkastoj mreži.* (Izvor: Baranović, 2019)

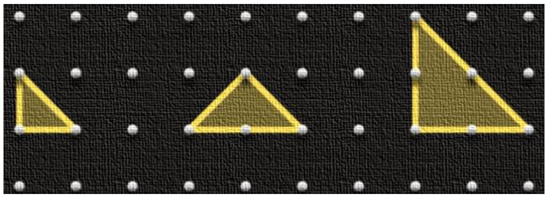


Slika 22. Dijelovi slagalice tangram

Slaganje se može provoditi kao otvorena aktivnost primjenom metode pokušaja i provjeravanja, može se provoditi strateškim promišljanjem, analiziranjem mogućnosti i sintetiziranjem uočenih veza, a može se provoditi i korištenjem modela za popločavanje na kojem je trokut zadan konturom.

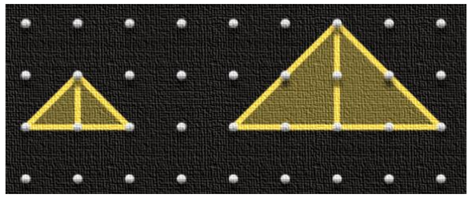
Rješenje. S obzirom da u iskazu zadatka nije navedeno treba li koristiti sve likove ili samo neke, slaganje se može provesti istraživanjem svih mogućnosti. Tangram slagalica već sadrži likove u obliku trokuta pa istraživanje može započeti od 1 dijela slagalice. Slike rješenja oblikuju se na online geoploči, koja je dostupna na https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/.

Korištenjem samo jednog dijela slagalice trokut se može prikazati na 3 različita načina (Slika 23).



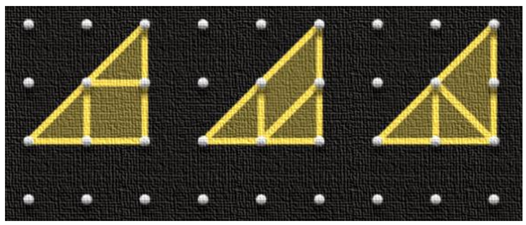
Slika 23. Trokuti od jednog dijela

Korištenjem dva dijela slagalice trokut se može prikazati na 2 različita načina (Slika 24).



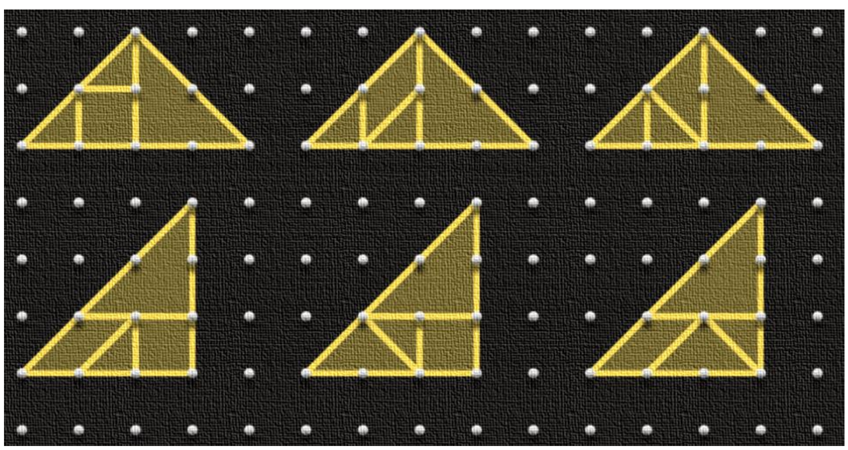
Slika 24. Trokuti od dva dijela

Korištenjem tri dijela slagalice trokut se može prikazati na 3 različita načina (Slika 25).



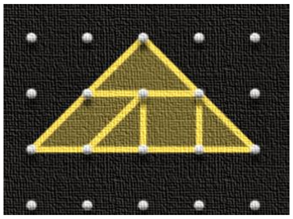
Slika 25. Trokuti od tri dijela

Korištenjem četiri dijela slagalice trokut se može prikazati na 6 različita načina (Slika 26).



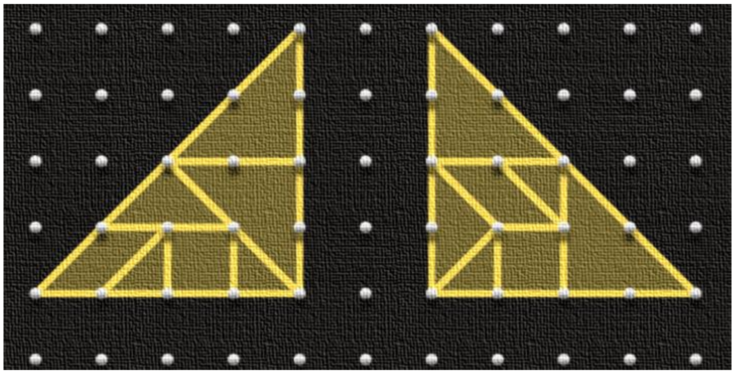
Slika 26. Trokuti od četiri dijela

Korištenjem pet dijelova slagalice trokut se može prikazati na 1 način (Slika 27), a korištenjem 6 dijelova slagalice trokut se ne može oblikovati.



Slika 27. Trokut od pet dijelova

Korištenjem svih sedam dijelova slagalice trokut se može prikazati na 2 različita načina (Slika 28).



Slika 28. Trokuti od svih sedam dijelova

Konačno, može se zaključiti da se korištenjem tangram slagalice trokuti mogu prikazati na 17 različitih načina. U ovakvim aktivnostima učenici se na prirodan način mogu uvesti i poučavati strateškom promišljanju: umjesto da slaganje trokuta uvijek započinju iz početka, dobiveno rješenje se može nadograđivati tako da se proširi do nove vrste trokuta. Iz predstavljenih rješenja može se uočiti kako se rješenja nadograđuju jedno na drugo.◆

Opisana aktivnost može se razvijati i nadograđivati u različitim smjerovima:

1) umjesto trokuta može se oblikovati kvadrat, pravokutnik, trapez itd.
2) mogu se određivati opsezi i ploštine oblikovanih likova te ih međusobno uspoređivati po opsezima i ploštini (npr. za likove na slici 26)
3) mogu se istražiti koji su trokuti među njima sukladni ili slični i koliki je koeficijent sličnosti
4) mogu se unutar jednog trokuta prebrojavati drugi likovi (npr. unutar trokuta na slici 28. prebrojati sve četverokute i imenovati njihove vrste, zatim peterokute itd.
5) istražiti koji se sve konveksni likovi mogu oblikovati od svih sedam dijelova tangram slagalice, koji od njih je najvećeg, a koji najmanjeg opsega itd.

Iz prethodnih aktivnosti vidljivo je kako se mogu oblikovati srodni, a opet različiti zadaci i kako se mogu međusobno povezivati. Sve to prije svega ovisi o uzrastu učenike s kojima se radi, ali i znanju i vještinama učitelja.

Slaganje likova zasigurno se može provoditi sa svim uzrastima i to bi trebale biti prve aktivnosti pri korištenju tangram slagalice kao didaktičkog sredstva, a određivanje njihovih opsega i ploština te međusobno uspoređivanje treba prilagoditi uzrastu, ovisno o tome poznaju li Pitagorin poučak ili ne.

Korištenjem didaktičkog sredstva stvara se prirodno okruženje za opisivanje provedenih aktivnosti čime učenici postupno upoznaju i koriste matematički rječnik i način opisivanja. Nakon toga, ono što je napravljeno i opisano može se i simbolički zapisati čime se učenici postupno upoznaju i sa formalnim matematičkim jezikom te kako funkcionalno povezati različite reprezentacije: vizualne prikaze, jezične opise i simboličke zapise.

Kroz prethodnih nekoliko zadataka pokazano je kako se od standardnih proceduralnih zadata može oblikovati matematički bogati zadatak i koristiti s različitim namjenama u učenju i poučavanju učenika, kao i vrednovanju njihovog znanja. Odabranim zadacima nikako nisu obuhvaćene sve mogućnosti već je samo „odškrinut prozor“ u široki spektar potencijala matematičkih zadataka, s nadom da će učitelji to prepoznati i koristiti.

S obzirom na način obrade odabrane teme, ovaj rad može služiti kao teorijska osnova za empirijsko istraživanje didaktičkog potencijala matematičkog zadatka.

6. Zaključak

„Matematika nipošto nije suhoparna, dosadna i bez mašte, već naprotiv, poput plemenite djevojke uzvraća ljubav onome tko je razumije i voli.“

Vladimir Devidè

Cilj ovog rada bio je pokazati da svaki zadatak u matematici ima svoj potencijal, a kako bi se on ostvario potrebno je poznavati različite vrste matematičkih zadataka, njihove karakteristike i mogućnosti te različite strategije rješavanja.

Matematički zadatak je ključni medij interakcije između učitelja i učenika i ključno sredstvo učenja matematike i razvoja matematičkih kompetencija jer se nastava matematike najviše „okreće“ oko rješavanja matematičkog zadatka. Zato je na učitelju odgovornost i izazov da odabere dobre, primjerene i raznovrsne zadatke kako bi svojim učenicima omogućio učenje matematike s razumijevanjem i razvoj različitih oblika matematičkog mišljenja te stjecanje matematičke pismenosti. Osim za učenje i poučavanje, zadatak učitelj koristi i za vrednovanje naučenog.

Za rješavanje matematičkih zadataka potrebna je opširnija razina znanja i razmišljanja, posebno matematički bogatih zadataka, odnosno zadaci viših kognitivnih zahtjeva. Takvi zadaci su u pravilu izazovni učenicima, a njihovim rješavanjem učenici imaju mogućnost proširiti svoje „vidike“, razvijati kreativnost, sigurnost i samopouzdanje u svoj rad, samostalnost te steći matematičke kompetencije. Oni potiču učenike na analiziranje, logičko razmišljanje i zaključivanje, argumentiranje i funkcionalno povezivanje različitih matematičkih ideja. Iako zadaci koji nisu matematički bogati, poznati i kao proceduralni zadaci, odnosno zadaci nižih kognitivnih zahtjeva, lako učenike uvuku u „kalup“ za rješavanje, oni nisu nevažni, ali ne bi smjeli biti dominantni.

Različite vrste zadataka imaju različite pedagoške namjene. Razumijevanje i razlikovanje vrsta matematičkih zadataka pomoći će učiteljima da bolje razumiju svrhu istih kako bi mogli odabrati odgovarajuće zadatke te procijeniti i osigurati različite aspekte učenja svojim učenicima.

Sažetak

Najčešća aktivnost učenika u nastavi matematike jest rješavanje matematičkog zadatka i on je ključni element interakcije između učitelja i učenika. Zato matematički zadatak zauzima ključno mjesto u učenju i poučavanju matematike kao i u vrednovanju znanja. Polazeći od tih činjenica, u radu se raspravlja o *definicijama* matematičkog zadatka, što je *rješenje*, a što *proces rješavanja* te što znači *riješiti* zadatak. Razmatraju se tri značajne klasifikacije zadataka: prema *cilju*, prema *kognitivnim zahtjevima* i prema *namjeni u poučavanja*, opisuju se njihove karakteristike i daju odgovarajući primjeri. Odabirom odgovarajućih zadataka različitih vrsta, ukoliko poznaje njihove karakteristike, učitelj ima priliku osigurati dobro okruženje za učenje, a učenici aktivnim sudjelovanjem u radu na zadacima imaju priliku postupno otkrivati matematičke ideje, usvajati matematičke koncepte s razumijevanjem, razvijati različite oblike matematičkog mišljenja i stjecati matematičku pismenost. Didaktički potencijal matematičkog zadatka otkriva se tek u cjelovitom radu na zadatku što se demonstrira kroz proces rješavanja nekoliko odabranih zadataka iz različitih područja matematike: od aritmetike, preko algebre do geometrije. Ipak, puni didaktički potencijal matematičkog zadatka dolazi do izražaja tek kad se predstavi učenicima, a zatim razmatraju njihovi načini rješavanja zadatka. Stoga ovaj rad može služiti kao teorijska osnova za empirijsko istraživanje didaktičkog potencijala matematičkog zadatka.

Ključne riječi*:* *matematički zadatak, vrste matematičkih zadataka, proces rješavanja, rješenje zadatka, didaktički potencijal zadatka*

Abstract

The most common activity of students in mathematics classes is solving a mathematical task, and it is a key element of the interaction between teacher and student. That is why the mathematical task occupies a key place in the learning and teaching of mathematics as well as in the evaluation of knowledge. Based on those facts, here, we discuss the definitions of a mathematical task, what is a solution, what is the process of solving, and what does it mean to solve a problem. Three important classifications of tasks are considered: according to goal, according to cognitive requirements and according to purpose in teaching, their characteristics are described and appropriate examples are given. By choosing appropriate tasks of different types, if he knows their characteristics, the teacher has the opportunity to provide a good environment for learning, and students, by actively participating in the work on the tasks, have the opportunity to gradually discover mathematical ideas, adopt mathematical concepts with understanding, develop different forms of mathematical thinking and acquire mathematical literacy. The didactic potential of a mathematical task is revealed only in complete work on the task, which is demonstrated through the process of solving several selected tasks from different areas of mathematics: from arithmetic, through algebra to geometry. However, the full didactic potential of a mathematical task comes to the fore only when it is presented to students, and then their ways of solving the task are studied. Therefore, this work can serve as a theoretical basis for an empirical research of the didactic potential of a mathematical task.

Keywords*:* *mathematical task, types of mathematical tasks, solving process, task solution, didactic potential of a mathematical task*

7. Literatura i izvori

Antunović-Piton, B. & Baranović, N. (2022). Factors Affecting Success in Solving a Stand- Alone Geometrical Problem by Students aged 14 to 15 // CEPS - *Center for Educational policy Studies journal*, 12; 4, 25. doi:10.26529/cepsj.889

Baranović, N. (2018). *Matematika 1*. Interna skripta. Filozofski fakultet. Split

Baranović, N. (2019). *Matematika 2*. Interna skripta. Filozofski fakultet. Split

Kavajin, A., Baranović, N. (2019a). Tangram u nastavi matematike, 1. dio. *Matematika i škola*, 21, 101; 18-26.

Kavajin, A., Baranović, N. (2019b). Tangram u nastavi matematike, 2. dio. *Matematika i škola*, 21, 102; 69-74.

Kurnik, Z. (2000). Matematički zadatak. *Matematika i škola*, 7; 51-58.

Polya, G. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Školska knjiga: Zagreb.

Posamentier, A.S. & Krulik, S. (2008). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions. Corwin Press*. A SAGE Company

Smith, M. S., & Stein M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 344-350.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455–488. https://doi.org/10.2307/1163292

Sullivan, P., Clarke, D.M. & Clarke, B.A. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York (NY): Springer.

Thornton, S. (2001). *A Picture is Worth a Thousand Words*. University of Canberra. Dostupno na: https://www.academia.edu/779030/A_picture_is_worth_a_thousand_words (6.5.2023.)

Yeo, J. B. (2007). *Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment*. MME Tehnical Report. Singapure: National Institute of Education

Zodik, I., Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example in geometry always helpful? In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 265-272. Seoul: PME.

8. Popis tablica

9. Popis ilustracija

Prilozi

Obrazac A.Č.
SVEUČILIŠTE U SPLITU

FILOZOFSKI FAKULTET

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

kojom ja Mari Bracanović, kao pristupnik/pristupnica za stjecanje zvanja magistrice primarnoga obrazovanja s pojačanim modulom informacijsko-komunikacijske tehnologije u učenju i poučavanju, izjavljujem da je ovaj završni/diplomski rad rezultat isključivo mojega rada, da se temelji na mojim istraživanjima i oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i literatura. Izjavljujem da ni jedan dio završnoga/diplomskoga rada nije napisan na nedopušten način, odnosno da nije prepisan iz necitiranoga rada, stoga ne krši ničija autorska prava. Također izjavljujem da nijedan dio ovoga završnoga/diplomskoga rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Split, 21. rujna 2023.

Potpis

MBracanović

OBRAZAC I.P.

IZJAVA O POHRANI ZAVRŠNOG/DIPLOMSKOGA RADA U DIGITALNI REPOZITORIJ FILOZOFSKOGA FAKULTETA U SPLITU

Student/ica: Mari Bracanović

Naslov rada: Potencijal matematičkog zadatka

Znanstveno područje: Matematika

Znanstveno polje: Obrazovne znanosti

Vrsta rada: Diplomski rad

Mentor/Mentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): dr. sc. Nives Baranović, v. pred.

Komentor/Komentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): /

Članovi Povjerenstva (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime):

1. doc. dr. sc. Lada Maleš, predsjednica
2. dr. sc. Nives Baranović, v. pred., član
3. Željka Zorić, v. pred., član

Ovom izjavom potvrđujem da sam autor/autorica predanoga završnoga/diplomskoga rada (zaokružite odgovarajuće) i da sadržaj njegove elektroničke inačice potpuno odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada. Slažem se da taj rad, koji će biti trajno pohranjen u Digitalnom repozitoriju Filozofskoga fakulteta Sveučilišta u Splitu i javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama *Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju*, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15, 131/17), bude:

a) u otvorenom pristupu

b) dostupan studentima i djelatnicima FFST-a

c) dostupan široj javnosti, ali nakon proteka 6 mjeseci / 12 mjeseci / 24 mjeseca (zaokružite odgovarajući broj mjeseci).

(zaokružite odgovarajuće)

U slučaju potrebe (dodatnoga) ograničavanja pristupa Vašemu ocjenskomu radu, podnosi se obrazloženi zahtjev nadležnomu tijelu u ustanovi.

Split, 21. rujna 2023. M Bracanović

Mjesto, nadnevak Potpis studenta/ice