

# GEOMETRIJSKI SANGAKU PROBLEMI

---

Cicvarić, Ana

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Humanities and Social Sciences, University of Split / Sveučilište u Splitu, Filozofski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:172:199388>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-10**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of humanities and social sciences](#)



**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FILOZOFSKI FAKULTET**

**DIPLOMSKI RAD**

**GEOMETRIJSKI SANGAKU PROBLEMI**

**ANA CICVARIĆ**

**Split, 2023.**

**Odsjek:** Učiteljski studij

**Studij:** Integrirani preddiplomski i diplomski učiteljski studij

## **GEOMETRIJSKI SANGAKU PROBLEMI**

**Studentica:**

Ana Cicvarić

**Mentorica:**

dr. sc. Nives Baranović, v. pred.

**Split, rujan 2023.**

# Sadržaj

1.	Uvod.....	1
2.	Sangaku (算額).....	2
2.1.	Edo razdoblje.....	2
2.2.	Sangaku (算額) - matematičke ploče .....	3
2.3.	Religije Japana i sangaku problemi .....	4
2.4.	Wasan i Yosan .....	5
2.5.	Sakoku i Genroku .....	7
2.6.	Haiku poezija.....	8
3.	Sadržaj i struktura sangaku ploča .....	11
3.1.	Prvi japanski teorem .....	12
3.2.	Drugi japanski teorem .....	13
3.3.	Treći japanski teorem .....	14
4.	Odabrani geometrijski sangaku problemi .....	15
4.1.	Problem 1. Lunule unutar pravokutnika .....	16
4.2.	Problem 2. Dvije kružnice različitih radijusa sa zajedničkom tangentom .....	21
4.3.	Problem 3. Tri kružnice različitih radijusa sa zajedničkom tangentom .....	26
4.4.	Problem 4. Dvije sukladne kružnice i kvadrat.....	32
4.5.	Problem 5. Šest kružnica unutar kvadrata i pravokutnih trokuta .....	37
4.6.	Problem 6. Trokut, kvadrat i krug unutar pravokutnog trokuta.....	44
4.7.	Problem 7. Pravokutnik maksimalne površine unutra pravokutnog trokuta ...	53
5.	Zaključak.....	57
6.	Literatura i izvori .....	60
7.	Popis ilustracija.....	62
	Prilozi.....	64

# 1. Uvod

U ovom radu aktualiziraju se geometrijski problemi nastali u davnoj prošlosti japanskoga naroda, oslikani na *sangaku* pločama, a koji su zadnjih godina sve više dostupni kroz internetske stranice svakome tko želi ući u taj "skriveni" svijet. *Sangaku* su zavjetne matematičke ploče na kojima su ispisivani matematički, posebno geometrijski problemi. Postavljane su pod strehe svetišta i hramova u znak zahvalnosti bogovima za uspješno riješene matematičke probleme, ali i kao znak molitve za što uspješniji nastavak rada na drugim matematičkim problemima. Upravo zbog unikatnosti njihovih kreacija, *sangaku* ploče spadaju pod umjetnička djela i sakralne predmete, a također i u zapise matematičkih dostignuća određenih razdoblja japanske povijesti.

Na samom početku ovoga rada daje se kratki povijesni pregled nastanka *sangaku* ploča, a u drugom se poglavlju opisuje njihov sadržaj i struktura te se posebno ističu tri japanska teorema. *Sangaku* tradicija smatra se potpuno jedinstvenim aspektom japanske kulture, a posebno je zanimljivo što ne postoji ništa slično *sangaku*-u u svijetu. Upravo iz tog razloga, *sangaku* je važan dio svjetske kulturne baštine.

U središnjoj temi ovoga rada opisuje se sedam odabranih geometrijskih *sangaku* problema. Uz vizualni prikaz, opis i detaljan prikaz rješenja, za svaki *sangaku* problem prikazana je geometrijska konstrukcija i njezin opis po koracima. Konstrukcija problema nije izvorno sadržana na *sangaku* pločama već je dodatni sadržaj uveden u ovom radu. Cilj je bio ne samo prepričati neku priču, već odabrane probleme i njihove konstrukcije prikazati na način kako bi se mogli koristiti u nastavi. Time se ovim radom osigurava dodatni nastavni materijal za primjenu u matematičkom obrazovanju na svim razinama: u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj nastavi matematike, ali i na sveučilišnoj razini.

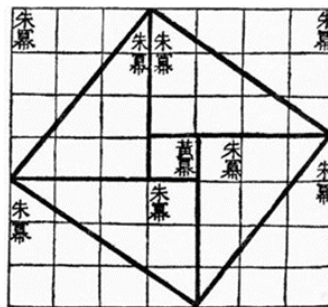
S obzirom na strukturu i način obrade *sangaku* problema, postupnost i sistematičnost obrade, rad može poslužiti kao korisno polazište ne samo učiteljima matematike već i svima onima koji se odluče na istraživanje geometrijskih *sangaku* problema, u nadi da će motivirati istraživanje i nekih drugih, možda složenijih problema.

## 2. Sangaku (算額)

### 2.1. Edo razdoblje

O japanskoj matematici do 7. stoljeća nema mnogo podataka, poznato je tek da u 7. stoljeću iz Kine u Japan počinju pristizati prvi matematički spisi o računanju, algebri i geometriji. Iako matematička znanja u Japan dolaze iz Kine, matematika nije odmah pronašla svoje mjesto u znanosti pa dolazi do stagnacije matematičke misli. Razdoblje šogunata Ashikaga poznato je kao mračno doba znanosti Japana, a trajalo je oko dvjesto pedeset godina. To razdoblje obilježeno je ratnim sukobima među klanovima koji su se borili za prevlast i samim time pustošili zemlju i onemogućili razvoj znanosti. Tokugawa Ieyasu odnosi veliku pobjedu porazivši Hideyoriya, što rezultira ujedinjenjem Japana. Tokugawu car proglašava šogunom, a sjedištem šoguna postaje provincijski grad Edo, današnji Tokio, po kojem je ovo važno razdoblje povijesti Japana dobilo ime. Razdoblje Edo karakteriziraju mir i samonametnuta izolacija Japana u trajanju od dvjesto pedeset godina, a upravo je sangaku tradicija obilježila Edo razdoblje. Naime, matematika je dobila uporište u japanskoj kulturi prikazivanjem matematičkih sadržaja na lijepo oslikanim drvenim pločama, sangaku pločama, postavljenim na mjesta bogoštovlja (Kabić, 2012).

*Chou Pei Suan Ching*, u prijevodu Aritmetički klasici, jedan je od najstarijih i najpoznatijih kineskih matematičkih tekstova koji je imao najveći utjecaj na japansku matematiku toga vremena. *Chou Pei Suan Ching* nastao je između 500. i 300. godine prije Krista, a riječ je o 256 riješenih problema. Također, u njoj se nalazi Gougu teorem, odnosno vizualni dokaz Pitagorina poučka (Slika 1.) za slučaj  $a = 3$ ,  $b = 4$  i  $c = 5$  (Kabić, 2012).



Slika 1. Gougu teorem

## 2.2. Sangaku (算額) - matematičke ploče

Najjednostavniji, doslovan prijevod japanske riječi *sangaku* znači *matematička ploča*. Kada se uđe u analizu sadržaja tih ploča dolazi se do preciznijeg značenja. Naime *sangaku* je izvorno složenica riječi *san*, što označava račun ili izračun, odnosno aritmetiku i riječi *gaku* što na japanskom jeziku znači znanost ili učenje. Drugim riječima, sadržaji *sangaku* ploča su razni matematički problemi, kraće *sangaku problemi*, koje su japanski matematičari, odnosno učitelji i učenici samurajskih škola, ali i običan narod, ispisivali na drvenim pločama, s posebnom pozornošću i pažnjom ukrašavali, a zatim ih postavljali pod krovovišta šintoističkih svetišta i budističkih hramova. Prema načinu prikaza i mjestu izlaganja *sangaku* problema, na Zapadu se oni često nazivaju *Geometrijski problemi u Japanskim hramovima* (Slika 2.).



Slika 2. Svetište Kaizu Tenman, sangaku ploča iz 1875. pod krovom hrama

Autori *sangaku*-a u početku su se koristili starokineskim jezikom, *kanbunom*. *Kanbun* je u Japanu ono što je latinski jezik na Zapadu: jezik kojim se koristio samo visokoobrazovani dio stanovništva. *Sangaku* je bio kulturni fenomen Japana *toga doba*, slabije poznat ostatku svijeta, ali jako važan dio svjetske kulturne baštine. *Sangaku* ploče su unikatne kreacije jer su istovremeno i umjetnička djela i sakralni predmeti, ali i originalna matematička dostignuća određenog razdoblja (Kabić, 2012). Na *sangaku* pločama rijetko su se davala objašnjenja ili dokazi *sangaku* problema, vjerojatno zbog ograničenosti prostora, ali i kako bi čitatelji bili izazvani da do rješenja problema dođu sami. Najstarija sačuvana *Sangaku* ploča potječe iz 1683. godine, a pronađena je u Tochigi prefekturi (Katsuhito, 2017). Prema Makishitau, osim te, sačuvano je tek oko 900 ploča i nekoliko rukom pisanih zbirki *Sangaku* problema s početka 19. stoljeća, dok su ostale oštećene vremenom ili uništene požarima i ratovima. Prema Katsuhito, 2005. godine pronađeno je pet ploča u prefekturi Toyama, što ukazuje na činjenicu da još uvijek postoje neotkrivene *sangaku* ploče.

### 2.3. Religije Japana i sangaku problemi

Japan je država s dvjema dominantnim religijama. Uz japanski šintoizam, budizam je također postao dominantnom religijom kada je u 7. stoljeću stigao u Japan iz Kine. Budistički su hramovi bili središta učenja, dok su se u šintoističkim svetištima održavali tradicionalni japanski festivali i rituali (Katsuhito, 2017). Po narodnim je vjerovanjima božica Kama, koja ujedinjuje više od 800 božanstava, voljela konje pa su joj ih stoga Japanci koji su bili u mogućnosti poklanjali. S druge strane, oni Japanci koji nisu bili u mogućnosti pokloniti konja, božici Kami su poklanjali sliku konja na drvenoj ploči kao zavjetni dar ili kao zahvalu bogovima. Slike konja na drvenim pločama postavljane su pod strehe svetišta, kao i sangaku ploče pa stoga jedni tvrde da su sangaku također zavjetne ploče darivane šintoističkim svetištima i budističkim hramovima u znak pobožnosti, molitve ili zahvale budući da su u nedostatku nadahnuća nekada znale proći i dvije godine u rješavanju određenih sangaku problema (Kabić, 2012). Šintoistička svetišta u Japanu poznata su kao *Ema*. *E* znači slika, a *ma* znači konj pa se iz toga može povezati darivanje slika konja kao zavjetni dar i postavljanje sangaku ploča na ista mjesta (Fameli, 2020). U to vrijeme nije bilo mnogo privatnih škola pa je razumljivo da su učitelji osjećali potrebu zahvaliti se bogovima na matematičkim otkrićima pripadnika njihovih škola. Drugi mogući razlog postavljanja sangaku ploča pod strehe svetišta i hramova (Slika 3.) je što u to vrijeme nije bilo sveučilišta u Japanu pa su tako šintoistička svetišta i budistički hramovi bili središta znanja (Kabić, 2012). Sličan običaj s pločicama zahvale uvriježen je i u nekim dijelovima Hrvatske, kao na primjer kamene pločice – zahvalnice u Kamenitim vratima. (Devidé, 2010).



Slika 3. Svetište Takemizuwake, Nagano Prefektura



## 2.4. Wasan i Yosan

Bogatstvo stvaralaštva japanskih geometričara začuđujuće je s obzirom na njihovu odcijepljenost od ostatka svijeta. Iz sadržaja sangaku ploča vidljivo je da su Japanci poznavali neke geometrijske tvrdnje puno prije no što su otkriveni na Zapadu. Matematika koja je nastala u Japanu tijekom Edo razdoblja naziva se *Wasan* (和) (wa – japanski, san – izračun), što u prijevodu znači *japanska matematika*, dok zapadnjačku matematiku Japanci nazivaju *Yosan* (洋算). Smatra se da je *Wasan* nastao 1627. godine objavom knjige *Jinkoki*, u prijevodu Mali i veliki brojevi, autora Yoshide Mitsuyoshija (Slika 4.). Djelo *Jinkoki* najutjecajnija je knjiga za matematičko obrazovanje u Japanu toga doba, a bila je i sinonim za aritmetiku. U njoj su dani i primjeri iz svakodnevnog života u Japanu toga vremena te se vježbalo računanje na sorobanu, odnosno na japanskoj inačici abakusa (Katsuhito, 2017).



**Slika 4.** *Jinkoki* - Mali i veliki brojevi

Jedan od najvećih matematičara Edo razdoblja je Seki Takakazu (Seki Kōwa, Slika 5.). Živio je od oko 1642. do 1708. godine, a za svoga života razvio je određene matematičke vještine i koncepte te došao do određenih matematičkih spoznaja prije svojih suvremenika matematičara na Zapadu po kojima su određene metode i pravila dobila ime. Seki Takakazu bavio se problemima iz različitih područja matematike, a najznačajnije Takakazuovo otkriće bio je princip kruga – Enri (*Yenri*). U početku se ta metoda koristila u računanju površine kruga, a kasnije ju je Seki poopćio i koristio za računanje površina likova omeđenih raznim krivuljama (Fameli, 2020).



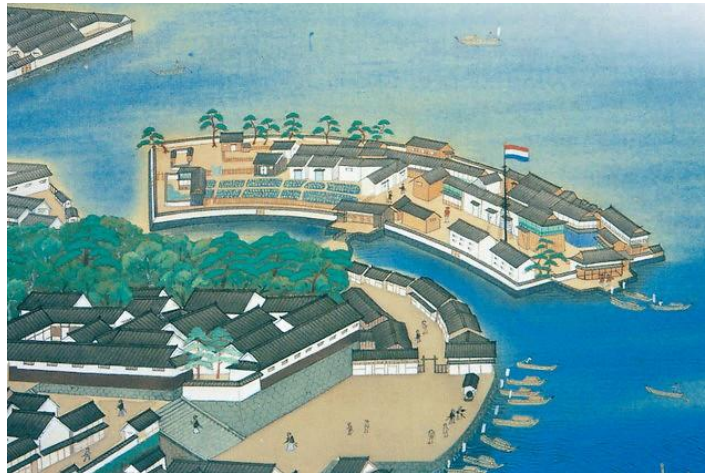
**Slika 5.** Matematičar Seki Takakazu

Tijekom 20. stoljeća sangaku problemima se nije posvećivalo previše pozornosti, ali gledajući internetske stranice u današnje vrijeme može se vidjeti da su oni danas itekako aktualni i to zahvaljujući nekim od nastavnika i učitelja matematike koji su te probleme aktualizirali obilazeći svetišta i hramove diljem Japana te pišući o tome. Između ostaloga, jedan od poznatijih je srednjoškolski nastavnik Hidetoshi Fukagawa koji ponovno obnavlja sjećanje na sangaku probleme objavljujući o njima u časopisima i knjigama. Danas se može na internetu pronaći mnoštvo sangaku problema, ali i onih problema koji su im nalik, što upućuje da se mnogi njima bave, dok se dio njih vrlo vjerojatno koristi i u nastavi. Iz navedenog je vidljivo da su sangaku problemi itekako aktualni i nakon tri stoljeća (Vincent & Vincent, 2004).

Hidetoshi Fukagawa obilazio je svetišta i hramove diljem Japana kako bi otkrio i sačuvao sve postojeće ploče, a opisao je i svoj prvi susret sa sangaku-om 1969. godine: učitelj japanske književnosti zamolio ga je da dešifrira knjigu iz 1815. godine, otisnutu na drvene blokove. To nam daje naslutiti kako je tradicionalna japanska matematika, *wasan*, koja je nekada cvjetala u Edo razdoblju, u 20. stoljeću bila gotovo zaboravljena (Kabić, 2012).

## 2.5. Sakoku i Genroku

Razdoblje japanske povijesti, nazvano *Sakoku*, označavalo je zatvorenu zemlju. Tijekom tog razdoblja nije bilo razmjene materijalnih dobara, kulture niti bilo kakvih informacija između Japana i ostatka svijeta, čime Japan postaje potpuno izoliran otok. Razdoblje Sakoku je također poznato i pod nazivom "Veliki mir" upravo zbog razdoblja samoće koja je nastupila uslijed samonametnute izolacije Japana: strancima je bilo zabranjeno ulaziti u Japan, a Japanci nisu smjeli napuštati svoju zemlju. Kršenje nametnutih odredbi rezultiralo bi smrtnom kaznom. Razdoblje samonametnute izolacije *Sakoku* završilo je 1641. godine kada je Japan maloj skupini nizozemskih trgovaca dopustio pristanak i boravak na umjetnom otoku Deshima jednom godišnje (Fameli, 2020). Minijaturalna Deshima napravljena u luci Nagasaki, bila je okružena zidom, a s kopnom ju je povezivao most kojega je nadzirala straža (Slika 6.). Japan je imao još jedan kontakt sa svijetom: osim nizozemskoga, i jedan je kineski brod mogao jednom godišnje pristati u japansku luku. Kada su klanski ratovi prestali, Japan je napokon bio ujedinjen i nastupilo je razdoblje mira. Samuraji su počeli gubiti na važnosti i imali su sve manji utjecaj (Katsuhito, 2017).



**Slika 6.** Otok Deshima

Odjeljenje Japana od ostatka svijeta samonametnutom izolacijom rezultiralo je snažnim razvojem autohtone znanosti, ali i umjetnosti. Ovo razdoblje nazvano je *Genroku*, a često se naziva i *Genroku renesansom*. Ovo razdoblje obilježili su samuraji koji su u nedostatku posla, zbog stanja mira, otvarali svoje privatne škole (*juku*). Glavni predmeti u školama samuraja bili su čitanje,

pisanje i matematika, a podučavale su se i borilačke vještine, filozofija, čajne ceremonije i aranžiranje cvijeća. Njegovale su se također i vještine u medicini, poeziji i glazbi. Na samom kraju Edo razdoblja, u Japanu je u tek dvjesto pedeset godina provedeno masovno opismenjavanje do tada gotovo nepismene populacije i tako japansko stanovništvo doživljava procvat. Budući da su samurajske škole, tzv. *juku*, bile jedini oblik škola toga vremena u Japanu, vrlo vjerojatno i sangaku tradicija vuče korijene iz upravo takvih škola. Ne zna se tko su sve autori sangaku problema, ali poznato je da su ih, osim učitelja i učenika samurajskih škola, izrađivali i žene i djeca. Igrom s trokutima i kružnicama na jednostavan način, stvorili su se složeni problemi koji plijene pozornost estetskim oblikovanjem raznim bojama na pločama, ali kada se analiziraju brzo se uočava da i nisu baš svi tako jednostavni kako na prvu izgledaju (Rothman & Fukagawa, 1998).

## 2.6. Haiku poezija

Hrvatski matematičar Devidé koji se bavio između ostalog i sangaku problemima, ali i pisanjem haiku poezije u svojoj knjizi *Čudesna matematika – pogled iznutra i izvana*, objašnjava poveznicu matematike i haiku poezije:

*„Estetski kriteriji igraju važnu ulogu pri formuliranju čitavih matematičkih struktura i teorija, posebno pri odabiru aksioma koji ih definiraju, pri čemu važnu i odlučujuću ulogu igraju ne samo zahtjevi za istinitošću, nego i za ljepotom. Pa ako smo već prihvatili činjenicu da su i poezija (a time i njezin haiku oblik) i matematika (i) umjetnost, neće biti neočekivano ili začuđujuće da među haiku poezijom i matematikom ima nekih veza.“*  
(Devidé, 2010, str 52).

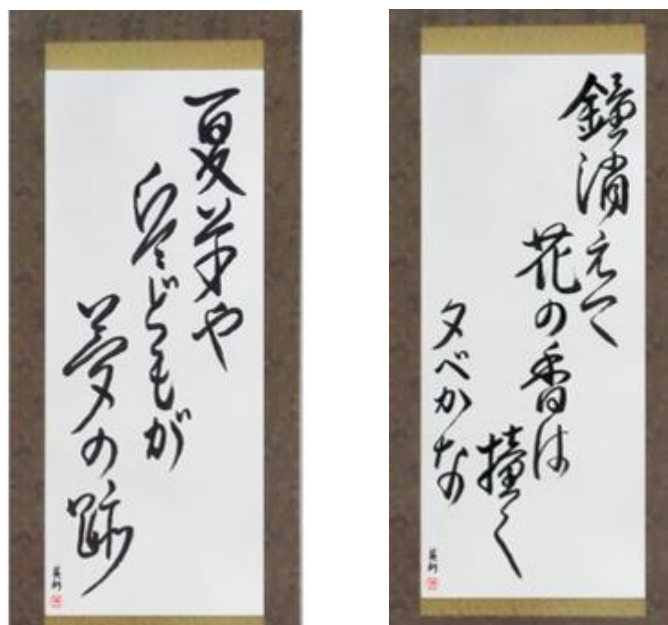
Haiku poezija još je jedan od brojnih oblika umjetnosti Japana nastala u razdoblju japanske povijesti Genroku renesanse. Pripada japanskoj pjesničkoj nerimovanoj formi. Karakteristično je da se sastoji od samo jedne strofe od 17 slogova. Strofa ima tri stiha, a forma u kojoj su pisani je strogo određena: prvi stih čini pet slogova, drugi stih sedam, a treći, ujedno i zadnji stih, sastoji se opet od pet slogova. Kao zaseban oblik poezije u japanskoj književnosti postaje tek u 17. stoljeću, ali ostaje nepoznat javnosti pod nazivom haiku sve do 19. stoljeća.

Izraz haiku izvedenica je nastala od riječi *haikai*, što označava šaljivi oblik pjesme povezane stihovima (*renga*), i riječi *hokku* koja označava početak strofe *renga* (Britannica: *Haiku*).

Ovaj oblik književnosti postao je prepoznatljiv vrlo rano u razdoblju Tokugawa šogunata kada ga je Bashō, veliki majstor haiku poezije, uzdigao na razinu visoko profinjene umjetnosti i tako popularizirao ovaj oblik poezije u 17. stoljeću. Danas se Bashō stoga smatra najutjecajnijim pjesnikom i piscem haiku poezije 17. stoljeća. Njegova su putovanja Japanom postala tema njegovih stihova, a njegovi su haikui bili dostupni širokom dijelu japanskog društva. Široka privlačnost, ali i dostupnost pjesama pomogla je da ovaj oblik umjetnosti postane najpopularniji oblik u japanskoj poeziji. Osim Bashōa, još neki o utjecajnijih pjesnika haiku poezije bili su Buson, Shiki, Kyoshi i Kawahigashi Hekigotō (Britannica: *Matsuo Bashō*)

Danas se izraz haiku koristi za opisivanje svih pjesama koje koriste strukturu od tri stiha od 17 slogova te motiv za pisanje više nije samo priroda već se raspon tema proširio. Također, svaka pjesma napisana u obliku haikua ili njegova modifikacija na jeziku koji nije japanski, također se naziva haiku. Nakon Drugog svjetskog rata se popularnost ovog oblika književnosti značajno proširila izvan granica Japana, dok se danas haiku piše i na velikom broju jezika svijeta. Svakako je haiku ostao umjetnost izražavanja što više misli u što manje riječi (Britannica: *Haiku*).

U nastavku su dana dva primjera haiku poezije na japanskom jeziku (Slika 7.), koje potpisuje Bashō (Fine Japanese Calligraphy, *Matsuo Bashō Haiku*), s prijevodom na hrvatski jezik.



Slika 7. Haiku poezija – Bashō

### Prva haiku pjesma

natsukusa ya  
tsuwamono domo ga  
yume no ato

夏草や  
兵どもが  
夢の跡

*Ljetna trava  
ratnici su  
tragovi snova.*

Bashō

芭蕉

### Druga haiku pjesma

kane kiete  
hana no ka wa tsuku  
yuube kana

鐘消えて  
花の香は撞く  
夕べ哉

*I dok zvono hrama blijedi  
zvuk se zadržava u mirisu cvijeća  
večer.*

Bashō

芭蕉

### 3. Sadržaj i struktura sangaku ploča

Promatrajući sangaku ploče uočljivo je na prvi pogled da su autori sangaku ploča posebnu pažnju posvećivali estetskom dojmu, kojeg su ostvarivali služeći se raznim bojama i kompozicijama prikazanih likova (Kabić, 2012). Na sangaku pločama najčešće su postavljeni različiti problemi koje treba riješiti pa se zato nazivaju *sangaku problemi*. Među sangaku problemima postoje jednostavni i lako rješivi, ali i oni koje je moguće riješiti tek uz primjenu razrađenih matematičkih metoda, uz dozu mašte, kreativnosti i upornosti (Devidé, 2010).

Sangaku problemi najčešće objedinjuju različite geometrijske koncepte u jednu vizualno privlačnu cjelinu te se zahtjeva otkrivanje ili potvrđivanje odgovarajućeg odnosa među njima, zbog čega se i nazivaju *geometrijski sangaku problemi*. Unutar njih se određuju razne vrste odnosa između stranica različitih  $n$ -terokuta i radijusa kružnica, između njihovih površina, razmatraju se različiti problemi optimizacije itd. Stoga, svaki čitatelj koji se želi uhvatiti u koštac s rješavanjem odabranog geometrijskog sangaku problema, treba imati barem elementarna geometrijska znanja, ali i razumijevanje utkanih geometrijskih konceptata kako bi ih mogao funkcionalno povezati u svrhu otkrivanja puta do rješenja postavljenog problema.

Sadržaj sangaku ploča obično slijedi zadanu formu, postavljanje problema kroz umjetnički prikaz i popratni tekst te izraz koji treba utvrditi (*Jojutstu* formula). Međutim, na većini sangaku ploča nije dan potpuni dokaz ili obrazloženje postavljenog izraza najčešće zbog nedovoljno prostora na ploči. No, s druge strane, smatralo se da su sangaku ploče postavljene na takav način i kao izazov čitatelju, dok je konačan izraz dan kao ideja vodilja na putu rješavanja problema. (Fameli, 2020).

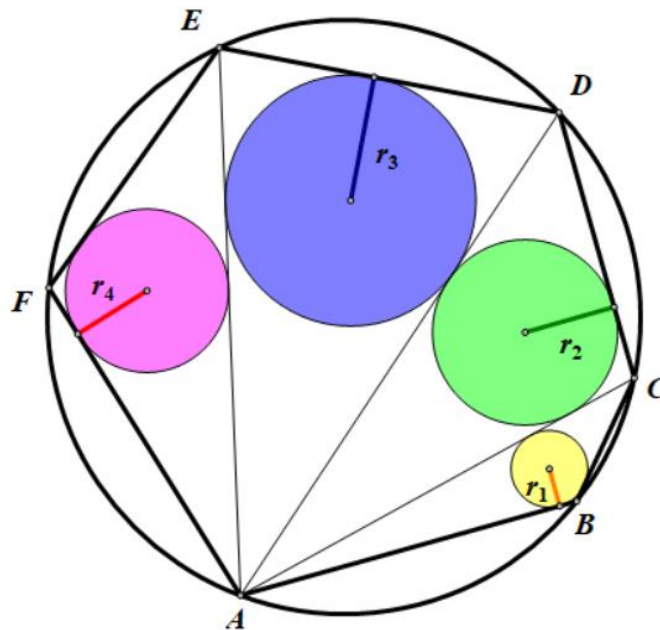
Kada se govori o sadržaju sangaku ploča nezaobilazno je spomenuti tri japanska teorema, koja su postavili Y. Mikamija i T. Kobayashi. Vizualnim prikazom plijene pozornost čitatelja već na prvi pogled, ali za otkrivanje postavljenog izraza potrebno je ipak malo više suptilnog geometrijskog znanja i vještina rješavanja geometrijskih problema.

### 3.1. Prvi japanski teorem

Prvi japanski teorem razmatra konveksni  $n$ -terokut koji je upisan u krug. Povlačenjem dijagonala iz jednog vrha,  $n$ -terokut se dijeli na  $n-2$  trokuta, a zatim je u svaki od tih trokuta upisana kružnica. Teoremom se tvrdi da je zbroj radijusa svih upisanih kružnica konstantan te da ne ovisi o podjeli  $n$ -terokuta na trokute (Slika 8.).

Dakle, treba dokazati:

Ako su  $r_1, r_2 \dots r_{n-2}$  radijusi kružnica upisanih u trokute, onda vrijedi:  $r_1 + r_2 + \dots + r_{n-2} = c$ .



Slika 8. Vizualni prikaz prvog japanskog teorema

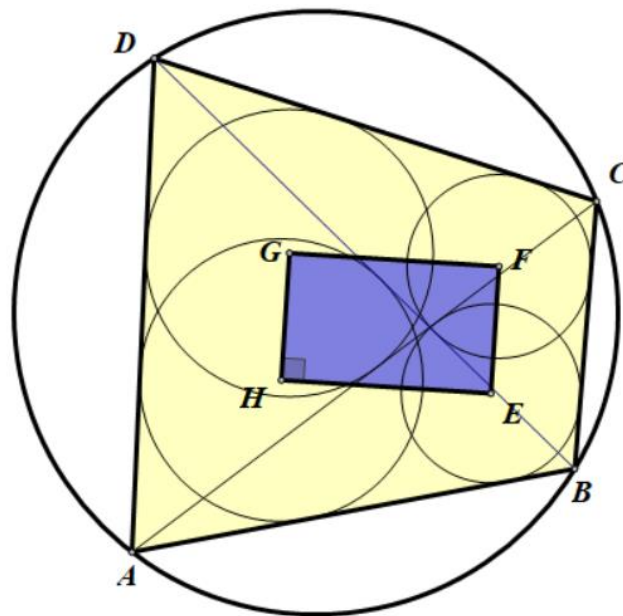


### 3.2. Drugi japanski teorem

U drugom japanskom teoremu razmatra se konveksni četverokut  $ABCD$  koji je upisan u krug (tetivni četverokut). Povlačenjem svake dijagonale četverokut se dijeli na dva trokuta i u svaki od tih trokuta upisana je kružnica. Središta tih kružnica čine četverokut  $EFGH$  koji je pravokutnik (Slika 9.).

Dakle, treba dokazati:

Ako su  $E, F, G$  i  $H$  središta kružnica upisanih redom u trokute  $\triangle ABC$ ,  $\triangle BCD$ ,  $\triangle CDA$  i  $\triangle DAB$ , onda je četverokut  $EFGH$  pravokutnik.



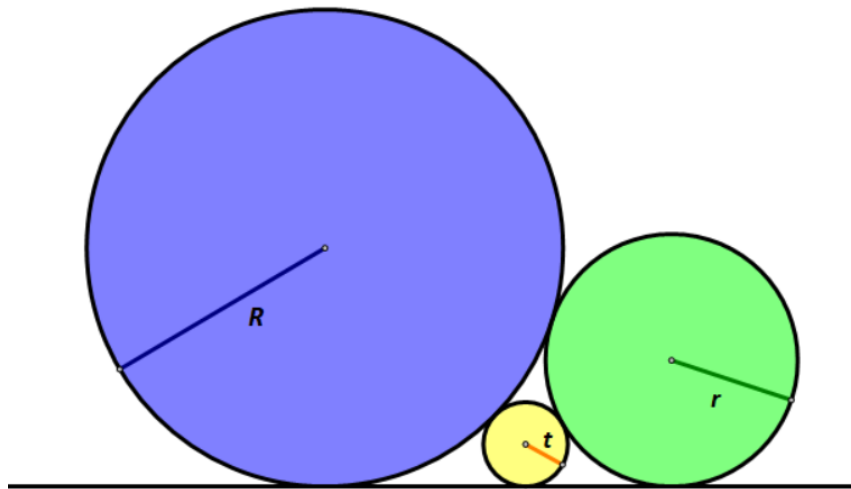
Slika 9. Vizualni prikaz drugog japanskog teorema

### 3.3. Treći japanski teorem

Treći japanski teorem razmatra tri kružnice različitih radijusa koje se dodiruju izvana svaka sa svakom i sve tri kružnice dodiruju isti pravac. U ovom problemu treba uspostaviti odnos između radijusa kružnica, odnosno radijus najmanje kružnice treba prikazati preko radijusa preostalih dviju kružnica (Slika 10.).

Dakle, treba dokazati:

Ako su radijusi kružnica  $t$ ,  $r$  i  $R$ , pri čemu je  $t < r < R$ , onda vrijedi:  $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$ .



Slika 10. Vizualni prikaz trećeg japanskog teorema

Inspirirani ljepotom predstavljenih geometrijskih sangaku problema u nastavku slijedi detaljan opis sedam odabranih problema koji objedinjuju različite elementarne geometrijske koncepte euklidske geometrije. Među odabranim problema nalazi se i treći japanski teorem.

Pri odabiru sangaku problema glavna ideja vodilja bila je mogućnost rješavanja postavljenih problema znanjima koja se stječu tijekom osnovnoškolskog matematičkog obrazovanja.

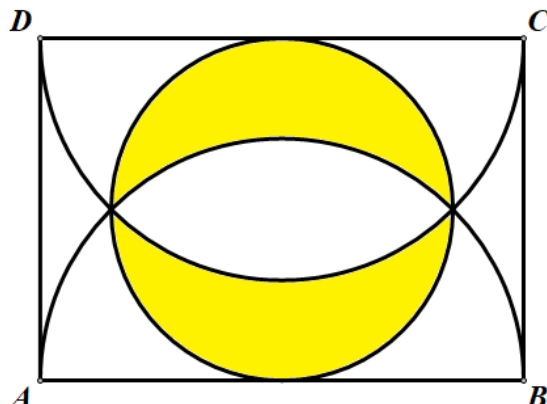
## 4. Odabrani geometrijski sangaku problemi

Struktura obrade odabranih geometrijskih sangaku problema u ovom radu slična je strukturi na sangaku pločama. Prvo se predstavlja problem kroz odgovarajući umjetnički izričaj, uz koji se ističe mjesto (prefektura) i godina izlaganja originalne ploče. Uz predstavljeni problem daje se i tekstualni opis problema te se ističe koji odnos je potrebno otkriti ili obrazložiti. Zatim slijedi detaljan prikaz rješenja koji uključuju samo elementarna geometrijska znanja. Vođeni prethodno opisanim karakteristikama sangaku problema, cilj ovog rada bio je ponuditi detaljan prikaz rješenja odabranih geometrijskih sangaku problema na način na koji bi se moglo raditi s učenicima na satu matematike.

Osim rješenja problema, uz svaki problem daje se i prikaz konstrukcije sangaku figure koja se razmatra unutar problema te detaljan opis procesa konstruiranja po koracima. Sve korištene figure izrađene su u programu dinamičke geometrije i sam opis procesa konstruiranja slijedi stvarni proces konstruiranja. Uz konstrukciju se ne daje posebno diskusija zato što opravdanost konstrukcije u većini slučajeva proizlazi iz samog rješenja problema.

Problemi su poredani prema zahtjevnosti i vrstama koncepata koji su u njima zastupljeni, a koji slijede geometrijski kurikulum elementarnog matematičkog obrazovanja.

#### 4.1. Problem 1. Lunule unutar pravokutnika



Slika 11. Problem 1 - Fukushima prefektura, 1883.

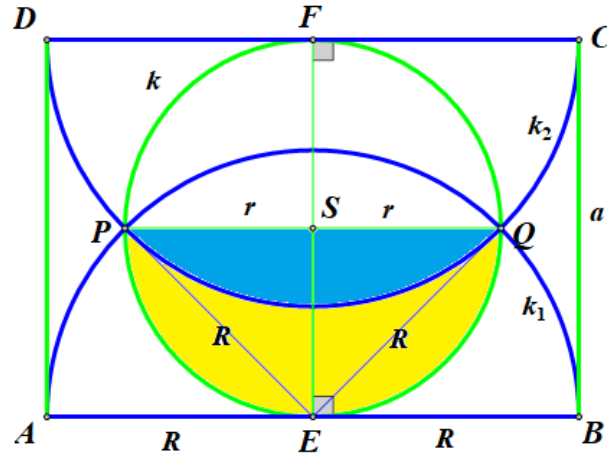
**Opis problema:** Četverokut  $ABCD$  je pravokutnik kojem je  $|AB| = |BC|\sqrt{2}$ . Krug koji dira dulje stranice pravokutnika prolazi sjecištima polukružnica nad tim stranicama i tako oblikuje dvije *lunule*. Površinu *lunule* izrazite preko duljine dulje stranice pravokutnika (Slika 11.).

**Rješenje:** Neka je zadan pravokutnik  $ABCD$  kojemu je kraća stranica duljine  $|BC| = a$  i dulja stranica duljine  $|AB| = a\sqrt{2}$  (Slika 12.).

Neka je  $R$  radijus polukružnica  $k_1$  i  $k_2$  nad duljim stranicama pravokutnika, a  $P$  i  $Q$  sjecišta tih polukružnica. Nadalje, neka je  $r$  radijus kružnice  $k$  koja iznutra dira stranice pravokutnika, a  $E$  i  $F$  dirališta te kružnice i stranica pravokutnika. S obzirom da kružnica  $k$  prolazi sjecištima polukružnica  $P$  i  $Q$ , zbog simetrije, točke  $E$  i  $F$  polovišta su stranica pravokutnika  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  redom.

Kako je stranica  $\overline{AB}$  duljine  $|AB| = a\sqrt{2}$  i ta stranica promjer je polukružnice duljine  $2R$  vrijedi:  $2R = a\sqrt{2}$ , odnosno polumjer polukružnice duljine je  $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . S obzirom na to da su  $A$ ,

$B$ ,  $P$  i  $Q$  točke iste polukružnice sa središtem  $E$  vrijedi:  $|AE| = |PE| = |QE| = |BE| = R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



Slika 12. Slika Problema 1 s oznakama

Prema uvjetu dodira kružnice  $k$  i stranica pravokutnika (koje pripadaju tangentama te kružnice) vrijedi:  $\overline{EF} \perp \overline{AB}$  i  $\overline{EF} \perp \overline{CD}$ . Kako su dužine  $\overline{EF}$  i  $\overline{BC}$  okomite na iste stranice pravokutnika, one su međusobno paralelne, tj. vrijedi:  $EF \parallel BC$ , a kako je udaljenost između paralelnih stranica pravokutnika jednaka, vrijedi:  $|EF| = |BC| = a$ . S druge strane, promjer kružnice  $k$  je dužina  $\overline{EF}$  duljine  $2r$  pa vrijedi:  $2r = a$ , odnosno polumjer kružnice  $k$  duljine je:  $r = \frac{a}{2}$ .

Nadalje, kružnica  $k$  prolazi i sjecištima polukružnica  $P$  i  $Q$ , a dužina  $\overline{PQ}$  sadrži središte kružnice  $S$  pa je  $\overline{PQ}$  promjer kružnice i vrijedi:  $|PQ| = 2r = a$ . Kako je  $\Delta PEQ$  trokut nad promjerom kružnice  $k$  on je pravokutan, a kako je njegov vrh središte polukružnice on je i jednakokratan s katetama duljine  $R$ .

Kako bi se odredilo koliku površinu zauzima *lunula*, oznaka  $P_{Lunula}$ , potrebno je odrediti koliku površinu zauzima polukrug nad promjerom  $\overline{PQ}$ , oznaka  $P_{polukruga}$  radijusa  $r$ , kao i kružni odsječak nad tetivom  $\overline{PQ}$ , oznaka  $P_{kružnog}$  odsječka. Za određivanje mjere površine kružnog odsječka potrebno je odrediti koliku površinu zauzima pripadni kružni isječak koji je dio polukruga radijusa  $R$  i središnjeg kuta od  $90^\circ$ , oznaka  $P_{kružnog}$  isječka radijusa  $R$ , kao i koliku površinu zauzima pripadni trokut  $P_{\Delta PEQ}$ .

Površina koju zauzima polukrug nad promjerom  $\overline{PQ}$ :

$$P_{\text{polukruga radijusa } r} = \frac{1}{2} P_{\text{kruga radijusa } r} = \frac{1}{2} r^2 \pi = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} \pi = \frac{a^2}{8} \pi.$$

Površina koju zauzima kružni isječak koji je dio polukruga radijusa  $R$  i središnjeg kuta od  $90^\circ$ :

$$P_{\text{kružnog isječka radijusa } R} = \frac{1}{4} P_{\text{kruga radijusa } R} = \frac{1}{4} R^2 \pi = \frac{1}{4} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4} \pi = \frac{a^2}{8} \pi.$$

Površina koju zauzima jednakokrani pravokutni trokut s katetama  $\overline{PE}$  i  $\overline{EQ}$  duljine  $R$ :

$$P_{\Delta PEQ} = \frac{|\overline{PE}| \cdot |\overline{EQ}|}{2} = \frac{R \cdot R}{2} = \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4} = \frac{a^2}{4}.$$

Konačno, površina koju zauzima jedna *lunula* jest:

$$\begin{aligned} P_{Lunule} &= P_{\text{polukruga radijusa } r} - P_{\text{kružnog odsječka}} \\ &= P_{\text{polukruga radijusa } r} - \left( P_{\text{kružnog isječka radijusa } r} - P_{\Delta PEQ} \right) \\ &= P_{\text{polukruga radijusa } r} - P_{\text{kružnog isječka radijusa } r} + P_{\Delta PEQ} \\ &= \frac{a^2}{8} \pi - \frac{a^2}{8} \pi + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

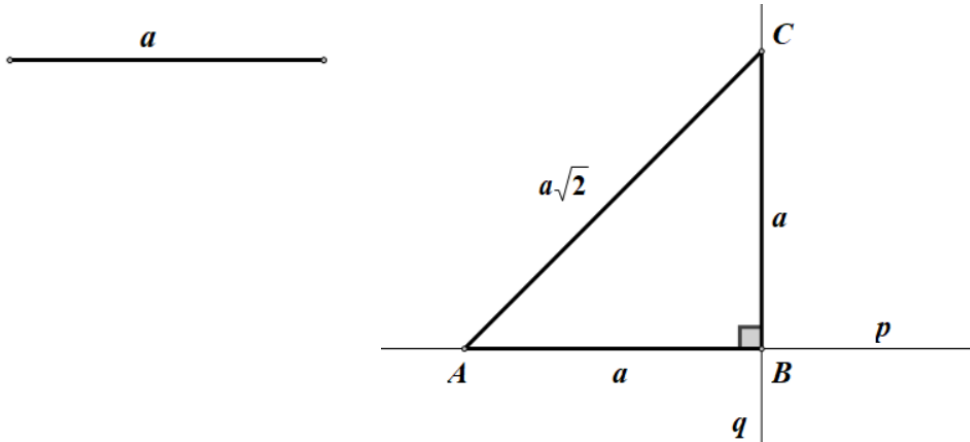
Kako je  $|AB| = a\sqrt{2}$ , odnosno  $|AB|^2 = 2a^2$ , vrijedi:  $P_{Lunule} = \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{8} = \frac{|AB|^2}{8}$ . To znači

da je površina kvadrata, kojemu stranica odgovara duljoj stranici pravokutnika, osam puta veća od površine koju zauzima jedna *lunula*, odnosno četiri puta veća od površine koju zauzimaju dvije *lunule*.

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= 8 \cdot P_{Lunule} \\ |AB|^2 &= 4 \cdot (2P_{Lunule}) \end{aligned}$$

**Konstrukcija:** Prije konstrukcije sangaku figure potrebno je konstruirati dužinu duljine  $a\sqrt{2}$ . Neka je zadana dužina duljine  $a$ . Dužina duljine  $a\sqrt{2}$  može se konstruirati kao dijagonala kvadrata stranice duljine  $a$  ili kao hipotenuza pravokutnog trokuta kojem su katete duljina  $a$  (Slika 13.).

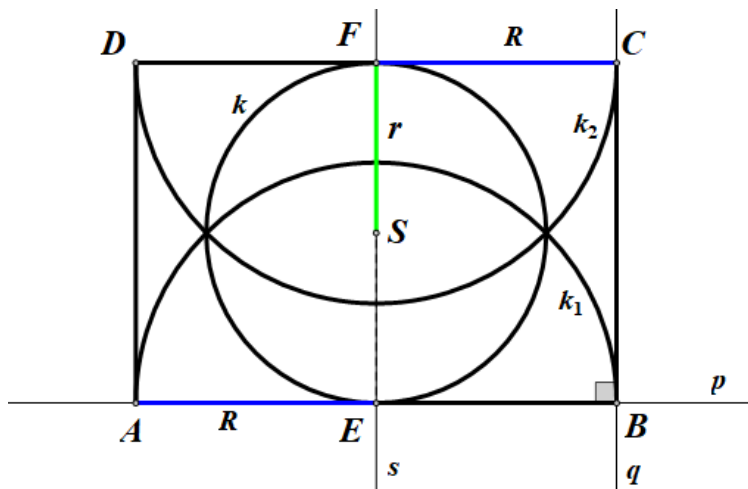
**Prvi dio:** konstrukcija dužine duljine  $a\sqrt{2}$ .



Slika 13. Konstrukcija dužine duljine  $a\sqrt{2}$

- na proizvoljni pravac  $p$  prenese se dužina duljine  $a$  od proizvoljne točke  $A$ ,  $|AB| = a$
- kroz točku  $B$  konstruira se okomica  $q$  na pravac  $p$
- na okomicu  $q$  prenese se dužina duljine  $a$  od točke  $B$ ,  $|BC| = a$
- dužina  $\overline{AC}$  je hipotenuza trokuta  $\Delta ABC$  duljine  $a\sqrt{2}$ ,  $|AC| = a\sqrt{2}$ .

**Drugi dio:** konstrukcija cijele sangaku figure (Slika 14.).



Slika 14. Konstrukcija sangaku figure 1

Konstrukcija pravokutnika  $ABCD$ :

- na proizvoljni pravac  $p$  prenese se dužina duljine  $a\sqrt{2}$  od proizvoljne točke  $A$ ,  
 $|AB| = a\sqrt{2}$
  - kroz  $B$  se konstruira okomica  $q$  na pravac  $p$
  - na okomicu  $q$  prenese se dužina duljine  $a$  od točke  $B$ ,  $|BC| = a$
  - iz točke  $A$  opiše se kružnica radijusa  $a$ ,  $k(A, a)$
  - iz točke  $C$  opiše se kružnica radijusa  $a\sqrt{2}$ ,  $k(C, a\sqrt{2})$
  - opisane kružnice sijeku se u točki  $D$ ,  $k(A, a) \cap k(C, a\sqrt{2}) = \{D\}$
- četverokut  $ABCD$  konstruiran na ovaj način jest pravokutnik.

Konstrukcija polukružnica  $k_1$  i  $k_2$ :

- konstruira se simetrala  $s$  stranice  $\overline{AB}$  (koja je ujedno i simetrala stranice  $\overline{CD}$ )  
simetrala polovi stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  redom u točkama  $E$  i  $F$
- konstruiraju se polukružnice  $k_1$  i  $k_2$  iz točaka  $E$  i  $F$  radijusa  $R = |AE| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  nad  
stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  redom kao promjerima,  $k_1(E, R)$  i  $k_2(F, R)$ .

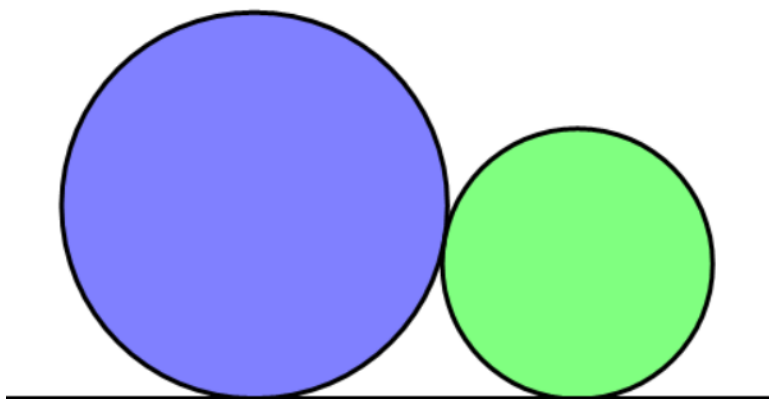
Konstrukcija kružnice  $k$ :

- konstruira se polovište  $S$  dužine  $\overline{EF}$ , a zatim kružnica  $k$  sa središtem  $S$  radijusa  
 $r = \frac{|EF|}{2}$ ,  $k(S, r)$ .

Opisanim postupkom konstruirana je cijela sangaku figura.



## 4.2. Problem 2. Dvije kružnice različitih radijusa sa zajedničkom tangentom



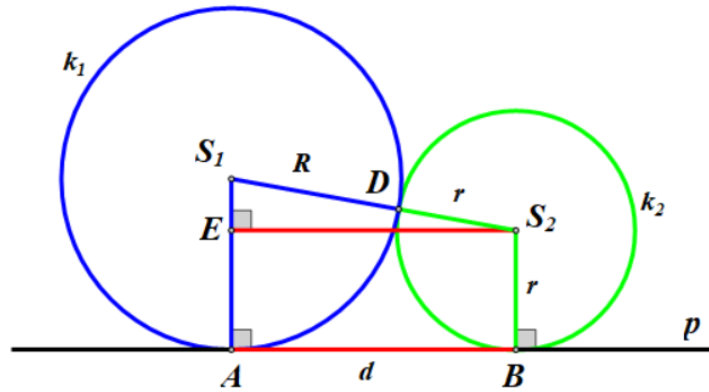
Slika 15. Problem 2 - Miyagi prefektura, 1892.

**Opis problema:** Dvije kružnice različitih radijusa dodiruju se izvana i obje kružnice dodiruju isti pravac. Odrediti udaljenost između točaka dirališta tih kružnica i pravca (Slika 15.).

**Rješenje:** Neka su kružnica  $k_1$  sa središtem  $S_1$  i radijusom  $R$  te kružnica  $k_2$  sa središtem  $S_2$  i radijusom  $r$ , pri čemu je  $R > r$ , kružnice koje se dodiruju izvana u točki  $D$ . Nadalje, neka je  $A$  točka dirališta kružnice  $k_1$  i pravca  $p$ , a  $B$  točka dirališta kružnice  $k_2$  i pravca  $p$ . Neka je  $d = |AB|$  udaljenost između dirališta  $A$  i  $B$  na pravcu  $p$  koju treba odrediti (Slika 16.).

S obzirom na to da kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju isti pravac  $p$ , taj pravac je zajednička vanjska tangenta tih dviju kružnica. Prema uvjetu dodira kružnice i tangente, polumjeri povučeni iz dirališta okomiti su na tangentu, zato vrijedi:  $\overline{AS_1} \perp p$ ,  $\overline{BS_2} \perp p$ . Kako su istaknuti polumjeri okomiti na isti pravac  $p$ , oni su međusobno paralelni, tj.  $\overline{AS_1} \parallel \overline{BS_2}$ .

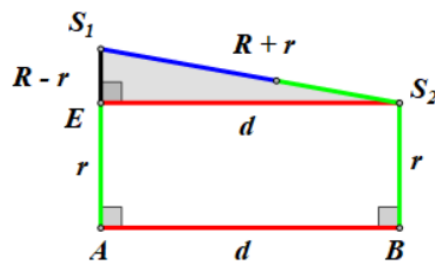
Prema uvjetu dodira dviju kružnica izvana, središta kružnica  $S_1$  i  $S_2$  te diralište  $D$  kolinearne su točke (pripadaju istom pravcu) pa vrijedi:  $|S_1S_2| = |S_1D| + |DS_2| = R + r$ .



Slika 16. Slika Problema 2 s oznakama

Neka je  $S_2E$  okomica povučena iz središta  $S_2$  na polumjer  $\overline{AS_1}$ . S obzirom na to da su pravac  $p$  i okomica  $S_2E$  okomiti na isti polumjer, oni su međusobno paralelni, tj.  $S_2E \parallel p$ . Stoga je četverokut  $ABS_2E$  pravokutnik jer su mu nasuprotne stranice paralelne, a kutovi pravi. U pravokutniku su nasuprotne stranice jednakih duljina pa vrijedi:  $|ES_2| = |AB| = d$  i  $|AE| = |BS_2| = r$

Promotrimo  $\Delta S_1ES_2$  (Slika 17.). Trokut je pravokutan s pravim kutom pri vrhu  $E$ . Hipotenuza trokuta duljine je  $|S_1S_2| = R + r$ , jedna kateta duljine je  $|S_1E| = |S_1A| - |AE| = R - r$ , a druga kateta duljine je  $|ES_2| = d$  i to je duljina koju treba odrediti.



Slika 17. Izdvojeni trokut  $\Delta S_1ES_2$

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut  $\Delta S_1ES_2$  dobiva se duljina druge katete:

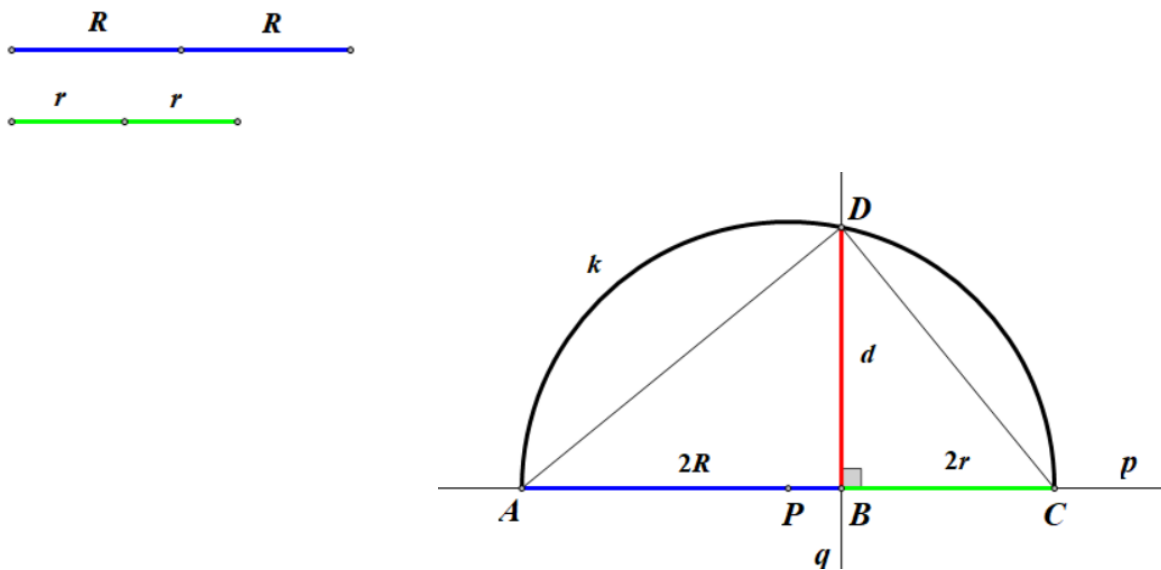
$$\begin{aligned}
|ES_2|^2 &= |S_1S_2|^2 - |S_1E|^2 \\
&= (R+r)^2 - (R-r)^2 \\
&= R^2 + 2Rr + r^2 - (R^2 - 2Rr + r^2) \\
&= 4Rr
\end{aligned}$$

Konačno, vrijedi:  $|AB| = |ES_2| = 2\sqrt{Rr}$ , odnosno  $|AB| = \sqrt{(2R)(2r)}$ , što znači da je udaljenost između dirališta kružnica s pravcem jednaka geometrijskoj sredini promjera tih kružnica.

**Konstrukcija:** Prije konstrukcije sangaku figure potrebno je konstruirati dužinu koja odgovara dužini između dirališta dviju kružnica i pravca.

Neka su zadani polumjeri (promjeri) dviju kružnica duljine  $R$  i  $r$ . Dužina duljine  $d = 2\sqrt{Rr} = \sqrt{(2R) \cdot (2r)}$  može se konstruirati kao visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta nad promjerom kružnice duljine  $2R + 2r$ .

**Prvi dio:** konstrukcija dužine duljine  $d = 2\sqrt{Rr}$  (Slika 18.).



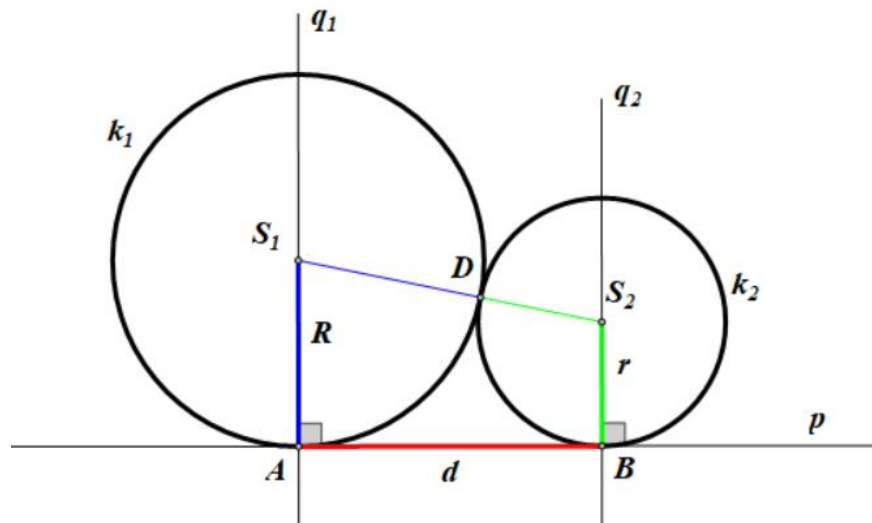
**Slika 18.** Konstrukcija dužine duljine  $d = 2\sqrt{Rr}$

- na proizvoljni pravac  $p$  prenese se dužina duljine  $2R$  počevši od proizvoljne točke  $A$ ,  $|AB| = 2R$
- zatim se na pravac  $p$  prenese dužina duljine  $2r$  počevši od točke  $B$ ,  $|BC| = 2r$
- konstruira se polovište  $P$  dužine  $\overline{AC}$ , koja je duljine  $|AC| = |AB| + |BC| = 2R + 2r$
- konstruira se (polu)kružnica  $k$  nad promjerom  $\overline{AC}$ , sa središtem  $P$  radijusa  $|PA| = \frac{2R + 2r}{2} = R + r$ ;  $k(P, |PA|)$
- kroz točku  $B$  konstruira se okomica  $q$  na pravac  $p$
- neka je  $D$  točka presjeka kružnice  $k$  i okomice  $q$ ;  $k \cap q = \{D\}$
- trokut  $\triangle ACD$  je pravokutan s pravim kutom pri vrhu  $D$  (obodni kut nad promjerom kružnice), a dužina  $\overline{BD}$  je njegova visina na hipotenuzu
- prema Euklidovom poučku o duljini visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta vrijedi:

$$|BD| = \sqrt{|AB| \cdot |AC|} = \sqrt{(2R) \cdot (2r)} = 2\sqrt{Rr}.$$

Vrijedi:  $d = |BD| = 2\sqrt{Rr}$ .

**Drugi dio:** konstrukcija cijele sangaku figure (Slika 19.).

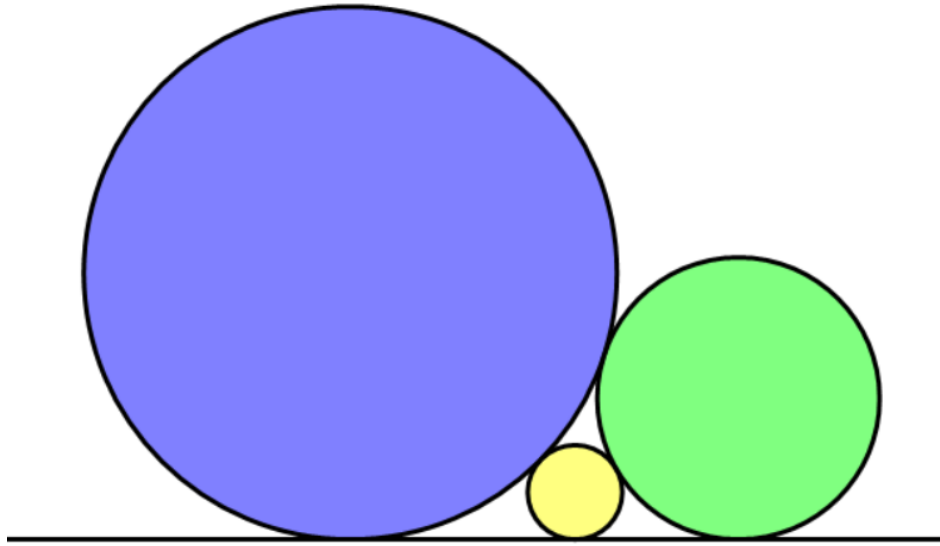


Slika 19. Konstrukcija sangaku figure 2

- na proizvoljni pravac  $p$  prenese se dužina duljine  $d$  počevši od proizvoljne točke  $A$ ,  
 $|AB| = d = 2\sqrt{Rr}$
- kroz točke  $A$  i  $B$  konstruiraju se redom okomice  $q_1$  i  $q_2$  na pravac  $p$
- na okomicu  $q_1$  prenese se dužina duljine  $R$  počevši od točke  $A$ ,  $|AS_1| = R$
- na okomicu  $q_2$  prenese se dužina duljine  $r$  počevši od točke  $B$ ,  $|BS_2| = r$
- konstruiraju se kružnice:  $k_1$  sa središtem  $S_1$  radijusa  $R$  i kružnica  $k_2$  sa središtem  $S_2$  radijusa  $r$ ;  
 $k_1(S_1, R)$  i  $k_2(S_2, r)$
- presjek kružnica  $k_1$  i  $k_2$  je točka  $D$ , tj. točka dirališta tih dviju kružnice,  $k_1 \cap k_2 = \{D\}$ .

Opisanim postupkom konstruirana je cijela sangaku figura.

### 4.3. Problem 3. Tri kružnice različitih radijusa sa zajedničkom tangentom



**Slika 20.** Problem 3 - Gunma Prefektura, 1824.

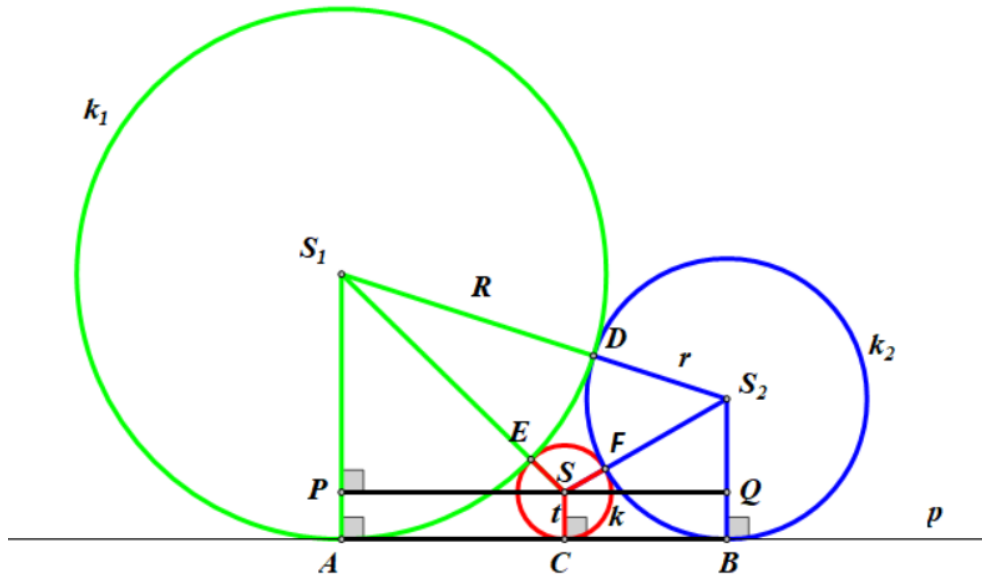
**Opis problema.** Tri kružnice različitih radijusa dodiruju se izvana svaka sa svakom i sve tri kružnice dodiruju isti pravac. Ako za radijuse kružnica vrijedi  $t < r < R$  pokazati da onda

vrijedi:  $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$  (Slika 20.).

Ovaj sangaku problem poznat je i kao jedan od tri važna japanska teorema. Iako je nastao u različito vrijeme u odnosu na prethodno opisani problem, ovdje se razmatra kao prirodan nastavak prethodnog sangaku problema. Iz tog razloga koriste se i jednake oznake za podudarne elemente.

**Rješenje:** Neka su kružnica  $k_1$  sa središtem  $S_1$  i radijusom  $R$ , kružnica  $k_2$  sa središtem  $S_2$  i radijusom  $r$  te kružnica  $k$  sa središtem  $S$  radijusa  $t$  tri kružnice koje se dodiruju izvana svaka sa svakom, pri čemu je  $R > r > t$ . Neka je diralište kružnica  $k_1$  i  $k_2$  točka  $D$ , diralište kružnica  $k_1$  i  $k$  točka  $E$  te diralište kružnica  $k_2$  i  $k$  točka  $F$  (Slika 21.).

Nadalje, neka su  $A$ ,  $B$  i  $C$  točke dirališta kružnica  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k$  redom s pravcem  $p$ . S obzirom na to da sve tri kružnice dodiruju isti pravac  $p$ , taj pravac je njihova zajednička vanjska tangenta. Prema uvjetu dodira kružnice i tangente, polumjeri povučeni iz dirališta okomiti su na tangentu, zato vrijedi:  $\overline{AS_1} \perp p$ ,  $\overline{BS_2} \perp p$  i  $\overline{CS} \perp p$ . Kako su istaknuti polumjeri okomiti na isti pravac  $p$ , oni su međusobno paralelni, tj.  $\overline{AS_1} \parallel \overline{BS_2} \parallel \overline{CS}$ .

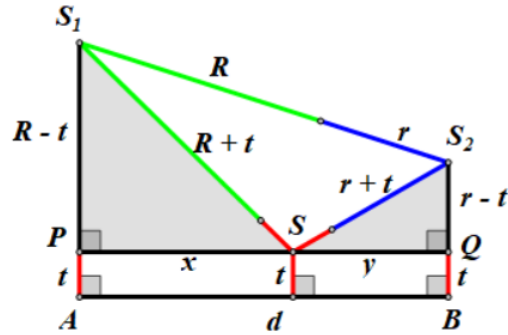


Slika 21. Slika Problema 3 s oznakama

Prema uvjetu dodira dviju kružnica izvana, središta kružnica  $S_1$  i  $S_2$  te diralište  $D$  kolinearne su točke (pripadaju istom pravcu) pa vrijedi:  $|S_1S_2| = |S_1D| + |DS_2| = R + r$ . Analogno, središta kružnica  $S_1$  i  $S$  te diralište  $E$  kolinearne su točke pa vrijedi:  $|S_1S| = |S_1E| + |ES| = R + t$ . Također, središta kružnica  $S_2$  i  $S$  te diralište  $F$  kolinearne su točke pa vrijedi:  $|S_2S| = |S_2F| + |FS| = r + t$ .

Neka je  $PQ$  pravac kroz točku  $S$  paralelan s pravcem  $p$ ,  $PQ \parallel p$ . S obzirom na to da su na pravac  $p$  okomiti polumjeri kružnica  $\overline{AS_1}$ ,  $\overline{BS_2}$  i  $\overline{CS}$ , ti polumjeri okomiti su i na pravac  $PQ$ , a polumjeri su međusobno paralelni. Stoga je četverokut  $ABQP$  pravokutnik jer su mu nasuprotne stranice paralelne, a kutovi pravi. U pravokutniku su nasuprotne stranice jednakih duljina pa vrijedi:  $|PQ| = |AB| = d$  i  $|AP| = |CS| = |BQ| = t$ .

Promotrimo dva nastala trokuta:  $\Delta S_1PS$  i  $\Delta S_2SQ$  (Slika 22.). Trokuti su pravokutni s pravim kutem pri vrhovima  $P$  i  $Q$  redom. U trokutu  $\Delta S_1PS$  hipotenuza je duljine  $|S_1S| = R + t$ , jedna kateta je duljine  $|S_1P| = |S_1A| - |AP| = R - t$ , a druga kateta je nepoznate duljine  $|PS| = x$ . U trokutu  $\Delta S_2SQ$  hipotenuza je duljine  $|S_2S| = r + t$ , jedna kateta je nepoznate duljine  $|SQ| = y$ , a druga kateta je duljine  $|S_2Q| = |S_2B| - |BQ| = r - t$ .



**Slika 22.** Izdvojeni pravokutni trokuti  $\Delta S_1PS$  i  $\Delta S_2SQ$

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutne trokute  $\Delta S_1PS$  i  $\Delta S_2SQ$  mogu se odrediti duljine kateta  $x$  i  $y$  (ili primjenom rezultata iz prethodnog problema):

$$\begin{aligned}
 x^2 &= |PS|^2 = |S_1S|^2 - |S_1P|^2 & y^2 &= |SQ|^2 = |S_2S|^2 - |S_2Q|^2 \\
 &= (R+t)^2 - (R-t)^2 & &= (r+t)^2 - (r-t)^2 \\
 &= R^2 + 2Rt + t^2 - (R^2 - 2Rt + t^2) & &= r^2 + 2rt + t^2 - (r^2 - 2rt + t^2) \\
 &= 4Rt & &= 4rt \\
 x &= 2\sqrt{Rt} & y &= 2\sqrt{rt}
 \end{aligned}$$

Kako je s jedne strane  $|PQ| = |AB| = d$ , a s druge strane vrijedi:  $|PQ| = |PS| + |SQ| = x + y$ , izjednačavanjem se dobiva  $d = x + y$ . U prethodnom sangaku problemu (Problem 2) izveden je izraz za udaljenost između dirališta zajedničkih tangenti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ :  $d = |AB| = 2\sqrt{Rr}$ . Uvrštavanjem svih izvedenih izraza u jednakost  $d = x + y$  dobiva se:

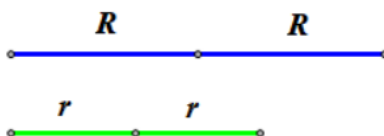


$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rt} + 2\sqrt{rt} \quad | : 2\sqrt{Rrt}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

**Konstrukcija:** Kako je već rečeno na samom početku opisa problema, ovaj problem se prirodno nadovezuje na prethodno opisani sangaku problem 2 što vrijedi i za njegovu konstrukciju.

Neka su zadani polumjeri (promjeri) dviju kružnica duljine  $R$  i  $r$ .



**Slika 23.** Polumjeri (promjeri) duljina  $R$  i  $r$

**Prvi dio:** konstrukcija dužine duljine  $d = 2\sqrt{Rr}$ .

Dužina duljine  $d = |AB| = 2\sqrt{Rr} = \sqrt{(2R) \cdot (2r)}$  konstruira se primjenom Euklidovog poučka, kako je opisano u konstrukciji problema 2 (Slika 18.).

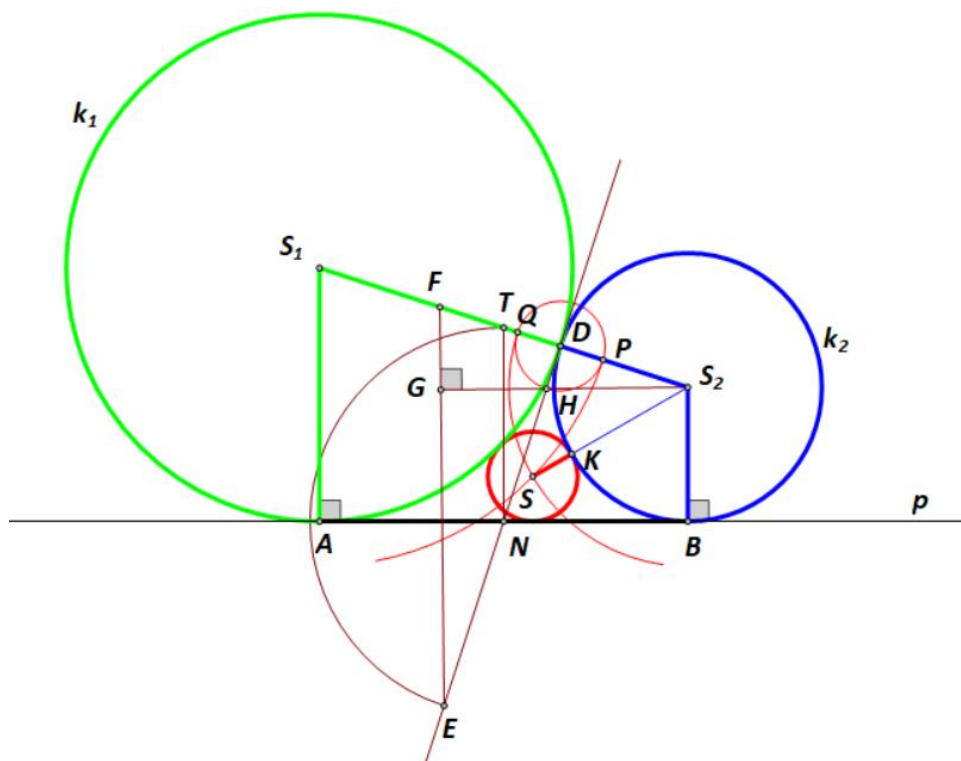
**Drugi dio:** konstrukcija kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .

Prema opisu konstrukcije u problemu 2, konstruiraju se kružnice  $k_1(S_1, R)$  i  $k_2(S_2, r)$  tako da se dodiruju izvana u točki  $D$ , a pravac  $p$  diraju u točkama  $A$  i  $B$  redom (Slika 19.).

**Treći dio:** konstrukcija kružnice  $k$

Konačno se konstruira kružnica  $k(S, t)$  koja izvana dira kružnice  $k_1$  i  $k_2$  te njihovu zajedničku tangentu  $p$ . Treći dio konstrukcije (upisivanje najmanje kružnice) izveden je prema prijedlogu

Chen Bai, koji je rješenje ponudio 2013., a sama konstrukcija i opis prilagođeni su oznakama koje se koriste u ovom radu<sup>1</sup> (Slika 24.).



**Slika 24.** Konstrukcija kružnice koja dira dvije kružnice i njihovu zajedničku tangentu

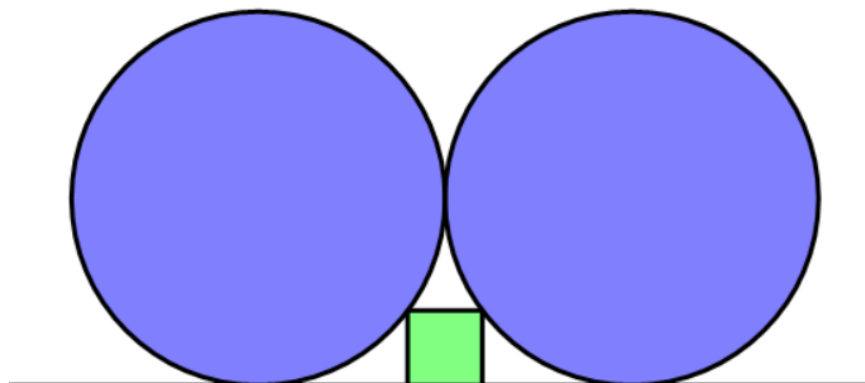
- konstruira se polovište  $N$  dužine  $\overline{AB}$  i polovište  $T$  dužine  $\overline{S_1S_2}$
- konstruira se kružnica sa središtem  $N$  radijusa  $|NT|$ , koja u presjeku s pravcem  $DN$  daje točku  $E$
- konstruira se polovište  $F$  dužine  $\overline{S_1D}$  te istakne dužina  $\overline{EF}$
- kroz točku  $S_2$  konstruira se okomica na  $EF$ , a nožište okomice neka je točka  $G$ ; okomica  $GS_2$  u presjeku s pravcem  $DE$  daje točku  $H$
- konstruira se kružnica sa središtem  $D$  i radijusa  $|DH|$ , koja u presjeku s dužinom  $\overline{S_1S_2}$  daje točke  $P$  i  $Q$

<sup>1</sup> Originalni opis konstrukcije može se pronaći na linku: <https://math.stackexchange.com/questions/269951/sangaku-how-to-draw-those-three-circles-with-only-a-ruler-and-a-compass> (Pristupljeno 30.5.2023)

- konstruira se kružnica sa središtem  $S_1$  radijusa  $|S_1P|$  i kružnica sa središtem  $S_2$  radijusa  $|S_2Q|$ , koje u presjeku daju točku  $S$  – središte tražene kružnice
- presjek dužine  $\overline{SS_2}$  i kružnice  $k_2$  je točka  $K$  te je  $t = |SK|$  radijus tražene kružnice
- konačno, konstruira se kružnica sa središtem  $S$  radijusa  $t$ ;  $k(S, t)$ .

Opisanim postupkom konstruirana je cijela sangaku figura.

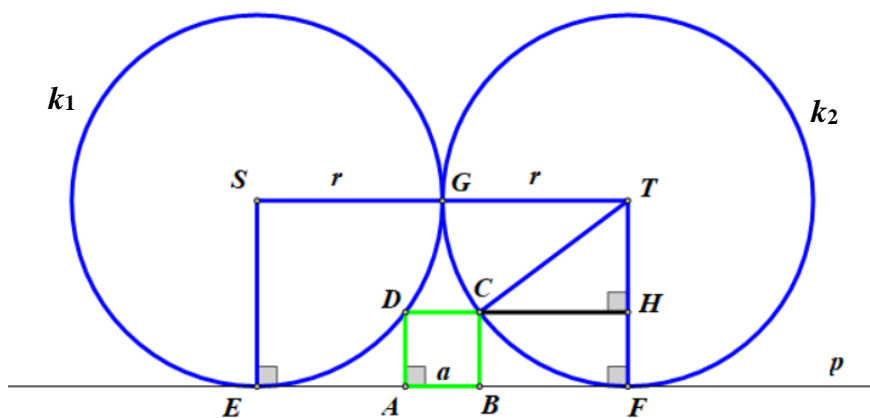
#### 4.4. Problem 4. Dvije sukladne kružnice i kvadrat



Slika 25. Problem 4 - Okayama prefektura, 1873.

**Opis problema:** Dvije kružnice jednakih radijusa dodiruju se izvana i obje kružnice dodiruju isti pravac. Između njih nalazi se kvadrat tako da jedna stranica kvadrata pripada pravcu, a po jedan od preostala dva vrha kvadrata pripadaju kružnicama. Stranicu kvadrata treba izraziti preko polumjera kružnica (Slika 25.).

**Rješenje:** Neka su kružnice  $k_1$  sa središtem  $S$  i  $k_2$  sa središtem  $T$  sukladne kružnice radijusa  $r$ , kružnice koje se dodiruju izvana u točki  $G$  i koje dodiruju isti pravac  $p$  u točkama  $E$  i  $F$  redom. Neka je  $ABCD$  kvadrat stranice duljina  $a$  kojemu stranica  $\overline{AB}$  pripada pravcu  $p$ , a preostala dva vrha  $C$  i  $D$  kružnicama  $k_2$  i  $k_1$  redom (Slika 26.).



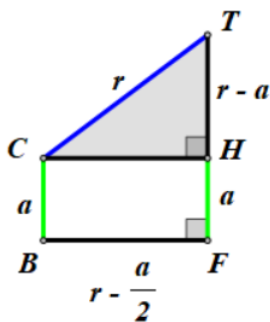
Slika 26. Slika Problema 4 s oznakama

S obzirom na to da kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju isti pravac  $p$ , taj pravac je zajednička vanjska tangenta tih dviju kružnica. Prema uvjetu dodira kružnice i tangente, polumjeri povučeni iz dirališta okomiti su na tangentu, zato vrijedi:  $\overline{SE} \perp p$  i  $\overline{TF} \perp p$ . Kako su istaknuti polumjeri okomiti na isti pravac  $p$ , oni su međusobno paralelni, tj.  $\overline{SE} \parallel \overline{TF}$ . A kako su polumjeri i sukladni,  $|SE| = |TF| = r$ , središta kružnica  $S$  i  $T$  nalaze na jednakoj udaljenosti od pravca  $p$  pa oni pripadaju pravcu koji je paralelan s pravcem  $p$ , tj.  $ST \parallel p$ .

Nadalje, četverokut  $SEFT$  je pravokutnik jer su mu nasuprotne stranice paralelne, a kutovi pravi. Prema uvjetu dodira dviju kružnica izvana, središta kružnica  $S$  i  $T$  te diralište  $G$  kolinearne su točke pa vrijedi:  $|ST| = |SG| + |GT| = r + r = 2r$ . Kako su nasuprotne stranice pravokutnika jednakih duljina to je  $|EF| = |ST| = 2r$ . Budući da stranica kvadrata  $\overline{AB}$  duljine  $a$  pripada pravcu  $p$ , odnosno dužini  $\overline{EF}$ , a zbog simetrije je  $|EA| = |BF|$ , vrijedi:

$$|BF| = \frac{|EF| - |AB|}{2} = \frac{2r - a}{2} = r - \frac{a}{2}.$$

Neka je  $CH$  okomica povučena iz vrha kvadrata  $C$  na polumjer  $\overline{TF}$ . Tada je četverokut  $BFHC$  pravokutnik jer su mu nasuprotne stranice paralelne i ima pravi kut. U pravokutniku su nasuprotne stranice jednakih duljina pa vrijedi:  $|CH| = |BF| = r - \frac{a}{2}$  i  $|FH| = |BC| = a$ . Promotrimo istaknuti trokut  $\triangle CHT$  (Slika 27.).



Slika 27. Izdvojeni pravokutni trokut  $\triangle CHT$

Trokut  $\triangle CHT$  je pravokutan s pravim kutom pri vrhu  $H$ . Hipotenuza trokuta duljine je  $|CT| = r$ , jedna kateta duljine je  $|CH| = r - \frac{a}{2}$ , a druga kateta duljine je  $|TH| = |TF| - |FH| = r - a$ .

Primjenom Pitagorina poučka na stranice trokuta  $\triangle CHT$  dobiva se:

$$\begin{aligned}(r-a)^2 + \left(r - \frac{a}{2}\right)^2 &= r^2 \\ r^2 - 2ar + a^2 + r^2 - ra + \frac{a^2}{4} &= r^2 \\ r^2 - 3ar + \frac{5}{4}a^2 &= 0 \quad | \cdot 4 \\ 4r^2 - 12ar + 5a^2 &= 0.\end{aligned}$$

S obzirom na to da se stranica kvadrata duljine  $a$  želi iskazati preko polumjera sukkladnih kružnica radijusa  $r$ , dobivena kvadratna jednadžba rješava se po  $a$ :

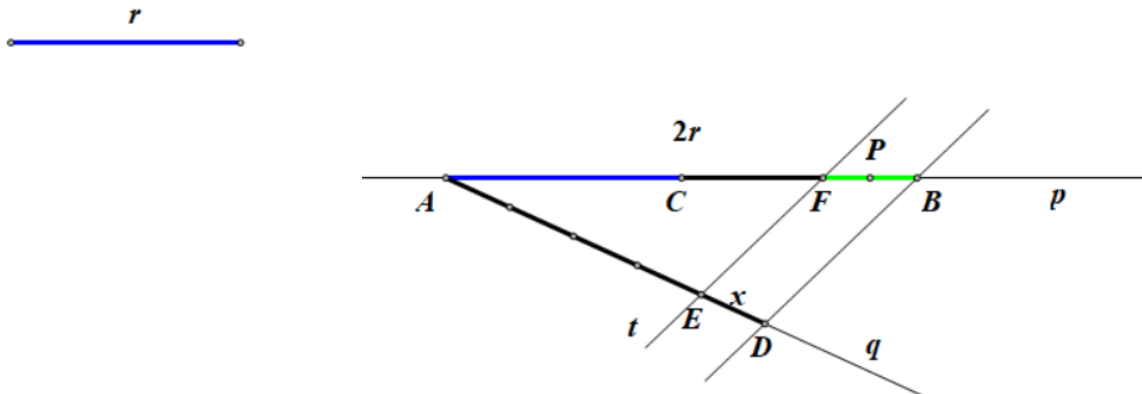
$$\begin{aligned}5a^2 - 12ra + 4r^2 &= 0 \\ a_{1,2} &= \frac{12r \pm \sqrt{144r^2 - 80r^2}}{10} = \frac{12r \pm \sqrt{64r^2}}{10} = \frac{12r \pm 8r}{10} = \frac{6r \pm 4r}{5} \\ a_1 &= \frac{6r - 4r}{5} = \frac{2}{5}r \\ a_2 &= \frac{6r + 4r}{5} = \frac{10r}{5} = 2r\end{aligned}$$

Budući da je kvadrat upisan u prostor između dviju kružnica i pravca, duljina stranice kvadrata je manja od polumjera sukkladnih kružnica, tj.  $a < r$ . Stoga rješenje  $a = 2r$  nije moguće te preostaje samo jedno rješenje:  $a = \frac{2}{5}r$ , odnosno  $5a = 2r$ . To znači da je promjer sukkladnih kružnica pet puta veći od stranice upisanog kvadrata.

**Konstrukcija:** Prije konstrukcije sangaku figure potrebno je konstruirati dužinu koja odgovara stranici kvadrata. Dužina duljine  $a = \frac{2}{5}r$  konstruira se kao petina promjera zadane kružnice,

$a = \frac{1}{5} \cdot 2r$ . Neka je zadan polumjer sukkladnih kružnica  $r$ .

**Prvi dio:** konstrukcija dužine duljine  $a = \frac{2}{5}r$  (Slika 28.).

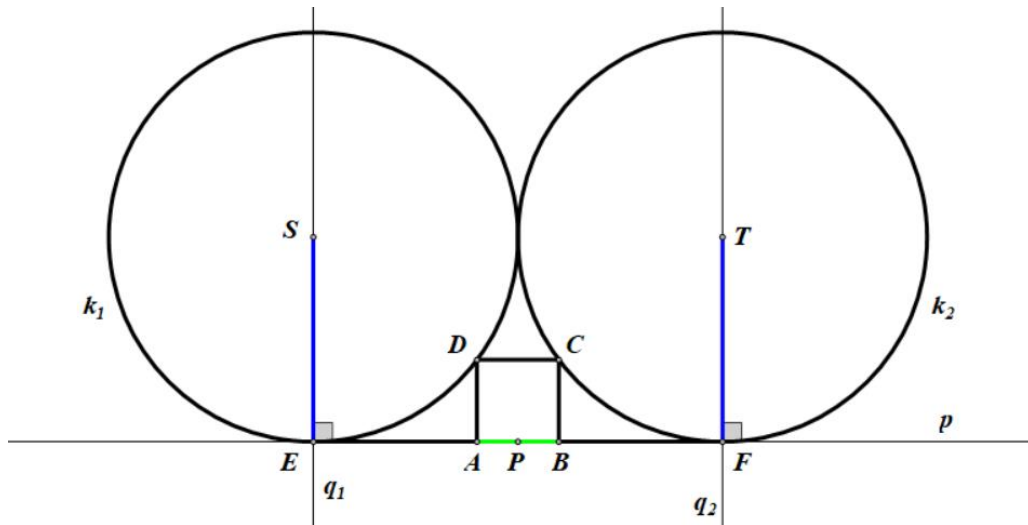


**Slika 28.** Konstrukcija dužine duljine  $a = \frac{2}{5}r$

- na proizvoljni pravac  $p$  prenese se dužina duljine  $r$  dva puta počevši od proizvoljne točke  $A$ ,  
 $|AB| = 2r$
- na pomoćni polupravac  $Aq$  nanese se uzastopno pet sukladnih dužina počevši od točke  $A$ ,  
 $|ED| = x$ ,  $|AD| = 5x$
- konstruiraj se pravac  $t$  paralelan s pravcem  $BD$  kroz točku  $E$
- pravac  $t$  siječe pravac  $p$  u točki  $F$  i dužina  $\overline{FB}$  je petina dužine  $\overline{AB}$ , tj. vrijedi:  $a = |FB| = \frac{2}{5}r$
- konstruiraj se i polovište  $P$  dužine  $\overline{FB}$ ,  $\frac{a}{2} = |FP| = |PB| = \frac{1}{5}r$

**Drugi dio:** konstrukcija sangaku figure (Slika 29.)

- na proizvoljni pravac  $p$  prenese se dva puta uzastopno dužina duljine  $r$ ,  $|EP| = |PF| = r$
- kroz  $E$  i  $F$  konstruiraju se okomice  $q_1$  i  $q_2$  na pravac  $p$
- na okomice  $q_1$  i  $q_2$  prenese se dužina duljine  $r$ ,  $|ES| = r$ ,  $|FT| = r$
- opišu se kružnice sa središtima  $S$  i  $T$  radijusa  $r$ ,  $k_1(S, r)$  i  $k_2(T, r)$



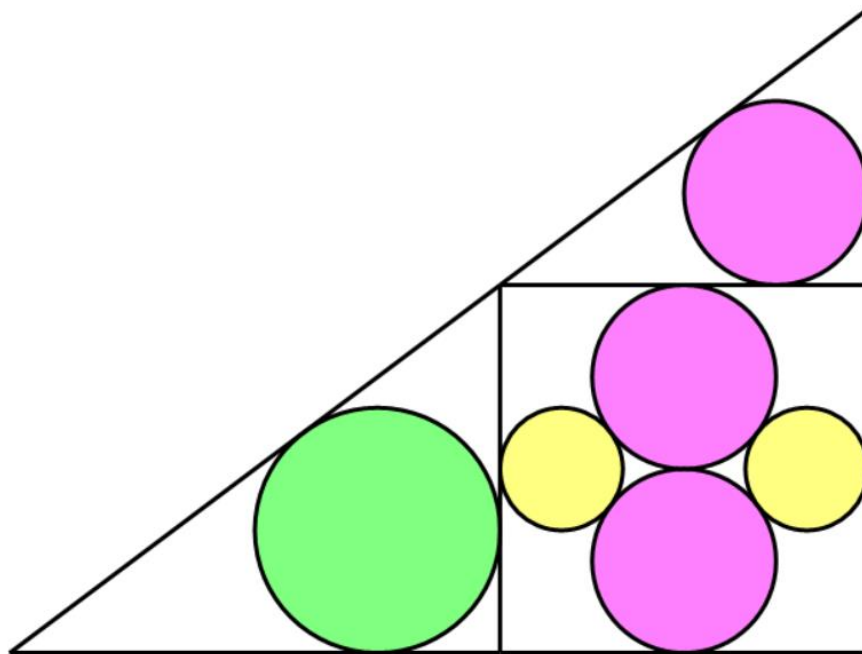
Slika 29. Konstrukcija sangaku figure 4

- iz točke  $P$  konstruira se kružnica radijusa  $\frac{a}{2}$  koja u presjeku s pravcem  $p$  daje dva vrha kvadrata  $A$  i  $B$
  - iz točaka  $A$  i  $B$  opišu se kružnice radijusa  $a$ , koje u presjeku s kružnicama  $k_1$  i  $k_2$  daju preostala dva vrha kvadrata  $D$  i  $C$  redom:  $k(A, a) \cap k_1 = \{D\}, k(B, a) \cap k_2 = \{C\}$
- četverokut  $ABCD$  konstruiran na opisani način jest kvadrat.

Opisanim postupkom konstruirana je cijela sangaku figura.



#### 4.5. Problem 5. Šest kružnica unutar kvadrata i pravokutnih trokuta



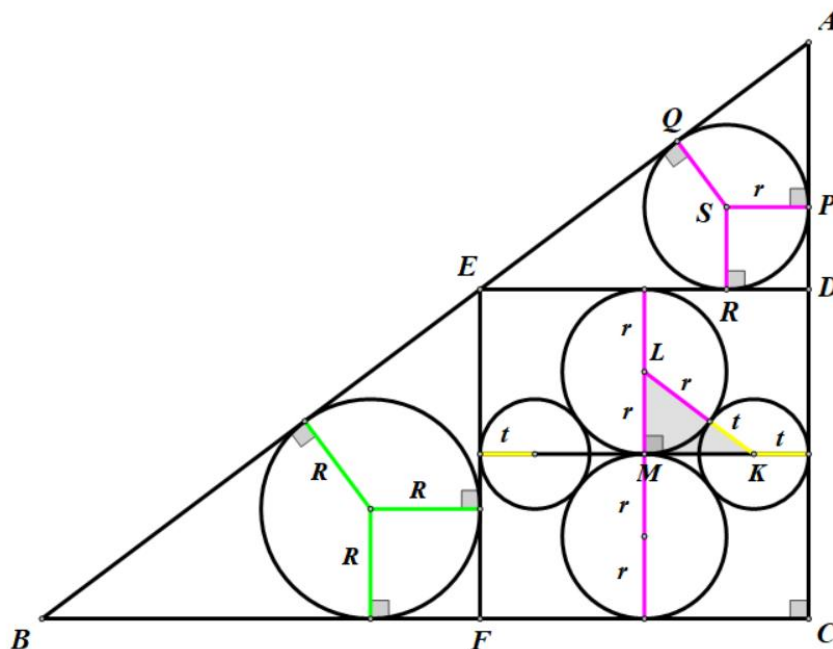
Slika 30. Problem 5 - Iwate prefektura, 1847.

**Opis problema:** Dva para kružnica radijusa  $r$  i  $t$ ,  $r > t$ , upisani su u kvadrat, a kvadrat je upisan u trokut kako je prikazano na slici. Po jedna kružnica radijusa  $R$  i  $r$ ,  $R > r$ , upisane su u manje pravokutne trokute izvan kvadrata. Polumjer najveće kružnice treba izraziti preko polumjera najmanje kružnice (Slika 30.).

Ovaj problem postavio je trinaestogodišnji dječak Sato Naosue, a izložen je 1847. u hramu u Akahagi u gradu Ichinoseki (Fameli, 2020).

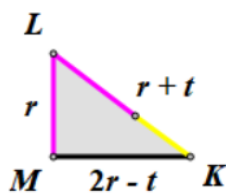
**Rješenje:** Neka je kvadrat  $CDEF$  stranice duljine  $a$  upisan u trokut  $\triangle ABC$ . Neka su kružnice upisane u kvadrat  $CDEF$  radijusa  $r$  i  $t$ , a kružnice upisane u trokute  $\triangle BFE$  i  $\triangle AED$  izvan kvadrata radijusa  $R$  i  $r$  redom tako da za radijuse kružnica vrijedi:  $R > r > t$  (Slika 31.).

Kako kružnice radijusa  $r$  dodiruju stranicu kvadrata  $CDEF$  iznutra, a one se međusobno dodiruju izvana vrijedi:  $a = 4r$ . To znači da je duljina stranice kvadrata  $a$  četiri puta veća od radijusa  $r$ , odnosno, radijus  $r$  je četiri puta manji od stranice kvadrata  $CDEF$ ,  $r = \frac{a}{4}$ .



Slika 31. Slika Problema 5 s oznakama

S obzirom na uvjet dodira dviju kružnica te kružnica i stranica kvadrata, istaknute dužine unutar kvadrata okomite su na odgovarajuće stranice kvadrata, međusobno su okomite i duljine su  $4r$ . Stoga je osjenčani trokut  $\Delta KLM$ , koji je određen središtima kružnica  $K$  i  $L$  te sjecištem istaknutih dužina  $M$ , pravokutan trokut s katetama duljine  $|ML| = r$  i  $|MK| = \frac{4r-2t}{2} = 2r-t$  te hipotenuzom duljine  $|KL| = r+t$  (Slika 32.).



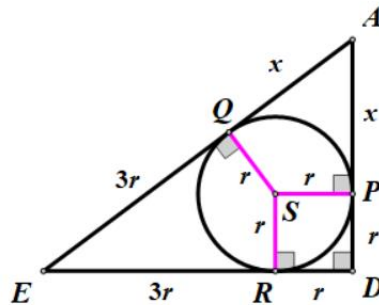
Slika 32. Izdvojeni trokut  $\Delta KLM$

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut  $\Delta KLM$  određuje se odnos između polumjera kružnica upisanih u kvadrat:

$$\begin{aligned}
r^2 + (2r - t)^2 &= (r + t)^2 \\
r^2 + 4r^2 - 4rt + t^2 &= r^2 + 2rt + t^2 \\
4r^2 - 6rt &= 0 \mid : 2r, r \neq 0 \\
2r - 3t &= 0 \\
2r &= 3t \\
r &= \frac{3}{2}t.
\end{aligned}$$

Ako bi radijus  $t$  izrazili preko radijusa  $r$  dobiva se  $t = \frac{2}{3}r$ , što znači da je polumjer najmanje kružnice veličine  $\frac{2}{3}$  polumjera srednje kružnice radijusa  $r$ .

Dalje se razmatra trokut  $\triangle AED$  izvan kvadrata u kojeg je upisana kružnica radijusa  $r$ .



Slika 33. Izdvojeni trokut  $\triangle AED$

Prema teoremu o odsječcima tangenti povučениh kroz točku izvan kružnice vrijedi: odsječci tangenti od točke izvan kružnice do dirališta s kružnicom jednakih su duljina. S obzirom na to da stranice trokuta pripadaju tangentama upisane kružnice koje su povučene kroz točke izvan trokuta (vrhovi trokuta) i s obzirom na to da su polumjeri povučeni iz dirališta okomiti na tangentu, u trokutu  $\triangle AED$ , kojemu je jedna kateta duljine  $|ED| = a = 4r$ , vrijedi:

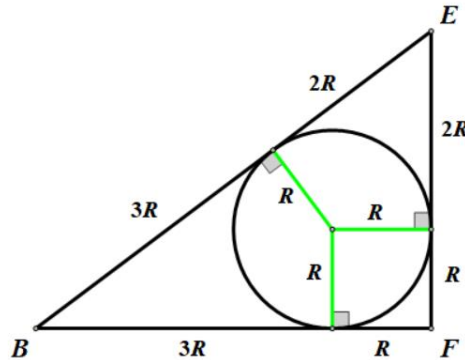
$$\begin{aligned}
|RD| &= |DP| = r \\
|EQ| &= |ER| = |ED| - |RD| = 4r - r = 3r \\
|AP| &= |AQ| = x.
\end{aligned}$$

Kako je trokut  $\triangle AED$  pravokutan, primjenom Pitagorina poučka na duljine njegovih stranica može se odrediti nepoznata duljina  $x$ :

$$\begin{aligned}
(4r)^2 + (r+x)^2 &= (3r+x)^2 \\
16r^2 + r^2 + 2rx + x^2 &= 9r^2 + 6rx + x^2 \\
8r^2 &= 4rx \mid : 4r, r \neq 0 \\
2r &= x.
\end{aligned}$$

Dakle, odsječak duljine  $x$  jednak je promjeru upisane kružnice  $2r$ , a za stranice trokuta  $\triangle AED$  vrijedi: katete su duljina  $|AD| = 3r$  i  $|ED| = 4r$ , a hipotenuza je duljine  $|AE| = 5r$ .

Još preostaje odrediti radijus najveće kružnice  $R$  koja je upisana u trokut  $\triangle BFE$ . Pravokutni trokuti  $\triangle BFE$  i  $\triangle EDA$  imaju podudarne odgovarajuće kutove pa su slični prema poučku  $KK$ . Kako slični trokuti imaju proporcionalne stranice, analognim zaključivanjem kao pri određivanju duljina stranica trokuta  $\triangle EDA$ , određuju se i duljine stranica trokuta  $\triangle BFE$  (Slika 34.).



Slika 34. Izdvojeni trokut  $\triangle BFE$

Dakle, za stranice trokuta  $\triangle BFE$  vrijedi: katete su duljina  $|EF| = 3R$  i  $|BF| = 4R$ , a hipotenuza je duljine  $|BE| = 5R$ . Kako je dužina  $\overline{EF}$  istodobno i stranica trokuta i stranica kvadrata, njezina duljina je s jedne strane  $3R$ , a s druge strane  $a = 4r$ . Izjednačavanjem i sređivanjem, uz poznatu vezu da je  $r = \frac{3}{2}t$ , dobiva se:

$$\begin{aligned}
3R &= 4r \\
R &= \frac{4}{3}r \\
R &= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}t \\
R &= 2t.
\end{aligned}$$

Dakle, polumjer najveće kružnice dvostruko je veći od polumjera najmanje kružnice, odnosno, polumjer najveće kružnice duljine  $R$  jednak je promjeru najmanje kružnice duljine  $2t$ .

**Konstrukcija:** Neka je zadana stranica kvadrata duljine  $a$ . Kako je  $a = 4r$ , za duljine polumjera upisanih kružnica vrijedi:

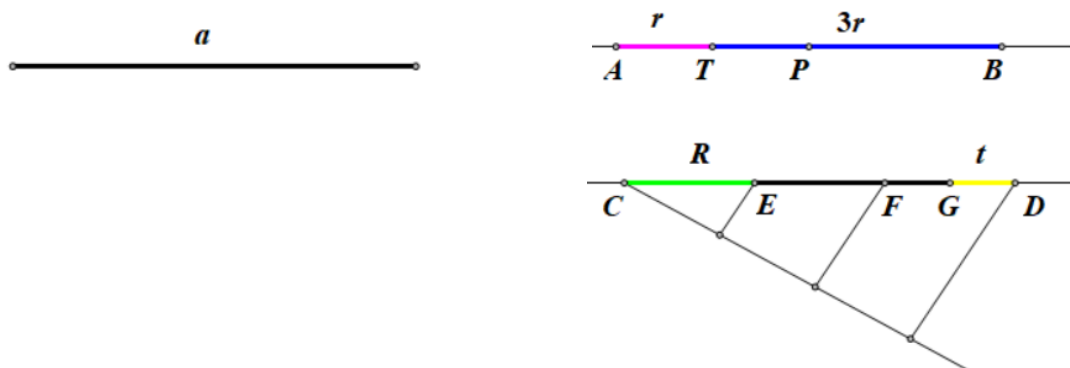
$$r = \frac{a}{4}$$

$$t = \frac{2}{3} \cdot r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{6}, \text{ odnosno } t = \frac{a}{6}$$

$$R = 2t = 2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{a}{3}, \text{ odnosno } R = \frac{a}{3}.$$

Sada se najprije konstruiraju dužine koje su polumjeri upisanih kružnica, a zatim se može konstruirati cijela sangaku figura.

**Prvi dio:** konstrukcija polumjera upisanih kružnica (Slika 35.)

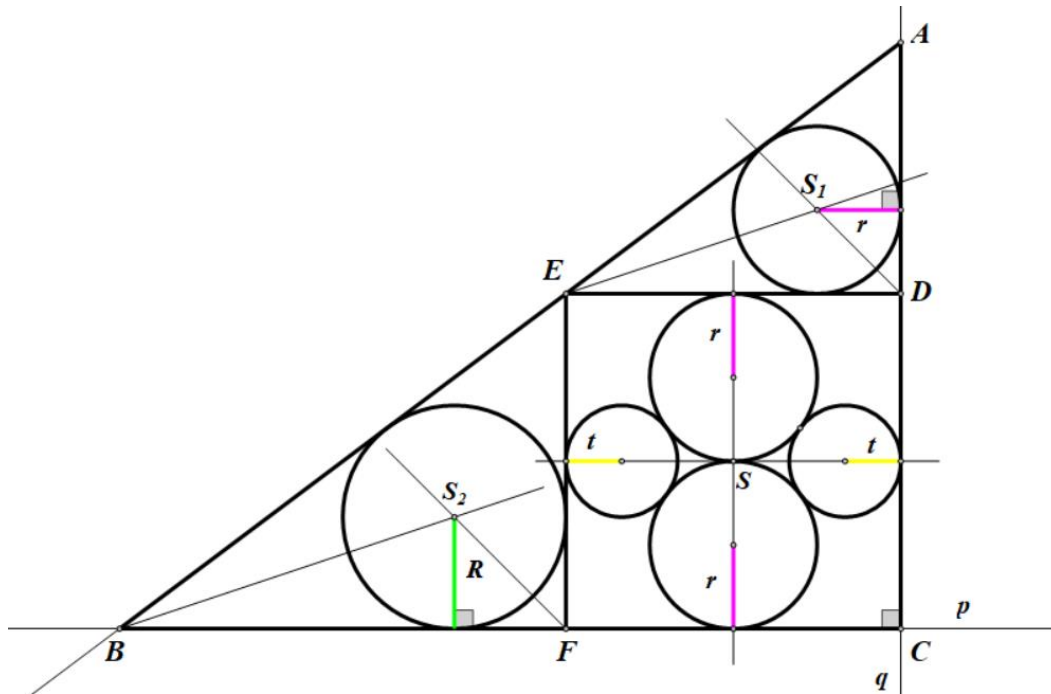


**Slika 35.** Konstrukcija polumjera upisanih kružnica

- na proizvoljni pravac prenese se dužina duljine  $a$  od točke  $A$ ,  $|AB| = a$
- simetralom dužine  $\overline{AB}$  konstruira se polovište dužine  $P$
- simetralom dužine  $\overline{AP}$  konstruira se polovište dužine  $T$  čime se dobiva četvrtina dužine, a ostatak su tri četvrtine dužine, tj. vrijedi:  $|AT| = r$ ,  $|TB| = 3r$
- na drugi proizvoljni pravac ponovno se prenese dužina duljine  $a$  od točke  $C$ ,  $|CD| = a$

- korištenjem pomoćnog polupravca iz točke  $C$  (ili  $D$ ) dužina  $\overline{CD}$  podijeli se na tri jednaka dijela,  $|CE| = |EF| = |FD| = R$
- simetralom dužine  $\overline{FD}$  konstruira se polovište dužine  $G$ , čime se dobiva šestina dužine  $\overline{CD}$ , tj. vrijedi:  $|FG| = |GD| = t$ .

**Drugi dio:** konstrukcija cijele sangaku figure (Slika 36.).



Slika 36. Konstrukcija sangaku figure 5

Konstrukcija kvadrata  $CDEF$ :

- na proizvoljni pravac  $p$  prenese se dužina duljine  $a$  od točke  $F$ ,  $|FC| = a$
  - kroz točku  $C$  konstruira se okomica  $q$  na pravac  $p$
  - na okomicu  $q$  prenese se dužina duljine  $a$  od točke  $C$ ,  $|CD| = a$
  - iz točaka  $D$  i  $F$  konstruiraju se kružnice radijusa  $a$ , sjecište tih kružnica je točka  $E$
- četverokut  $CDEF$  konstruiran na opisani način jest kvadrat.

Konstrukcija trokuta  $\triangle ABC$ :

- na pravac  $q$  prenese se dužina duljine  $3r$  od točke  $D$ ,  $|DA| = 3r$

- polupravac  $AE$  siječe pravac  $p$  u točki  $B$   
trokut  $\triangle ABC$  je pravokutni trokut u koji je upisan kvadrat  $CDEF$ .

Konstrukcija kružnica upisanih u kvadrat:

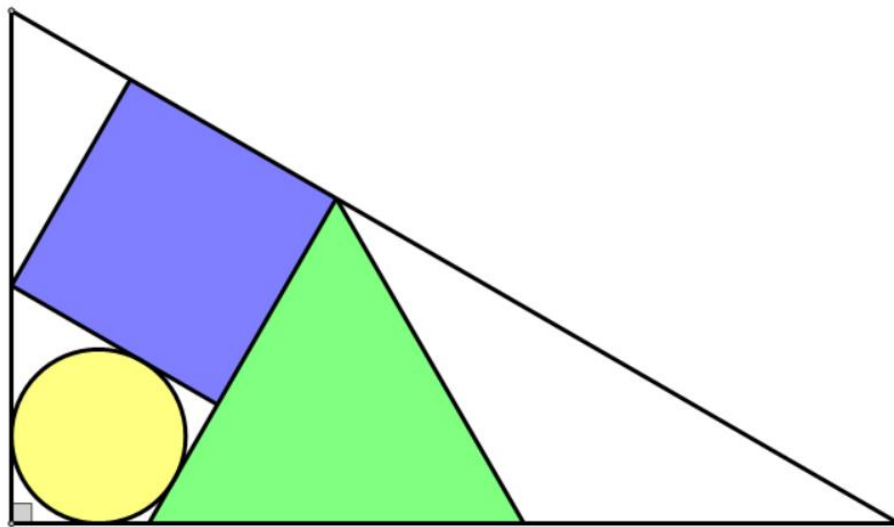
- konstruiraju se simetrale stranica kvadrata  $CDEF$ , točka  $S$  sjecište simetrala
- iz polovišta stranica kvadrata opišu se kružnice radijusa  $r$  i  $t$  kako bi se dobila središta odgovarajućih kružnica
- iz dobivenih središta opišu se parovi kružnica radijusa  $r$  i  $t$ .

Konstrukcija kružnica upisanih u trokute  $\triangle AED$  i  $\triangle BFE$  izvan kvadrata:

- unutar svakog trokuta  $\triangle AED$  i  $\triangle BFE$  konstruiraju se simetrale kutova (barem po dvije) kako bi se dobilo središte upisanih kružnica  $S_1$  i  $S_2$  redom
- iz središta  $S_1$  i  $S_2$  opišu se kružnice radijusa  $r$  i  $R$  redom:  $k(S_1, r)$ ,  $k(S_2, R)$ .

Opisanim postupkom konstruirana je zadana sangaku figura.

#### 4.6. Problem 6. Trokut, kvadrat i krug unutar pravokutnog trokuta



Slika 37. Problem 6 - Fukushima prefektura, 1877.

**Opis problema:** Kvadrat, jednakostranični trokut i krug upisani su u pravokutni trokut kako je prikazano na slici. Stranicu jednakostraničnog trokuta i polumjer kruga te stranice pravokutnog trokuta iskazati preko stranice kvadrata (Slika 37.).

**Rješenje:** Neka je  $\triangle ABC$  pravokutni trokut u kojeg su upisani jednakostranični trokut  $\triangle DEF$  stranice duljine  $a$ , kvadrat  $FGHR$  stranice duljine  $b$  i kružnica radijusa  $r$  sa središtem  $S$  (Slika 38.).

S obzirom da je trokut  $\triangle DEF$  jednakostranični, njegovi unutrašnji kutovi su po  $60^\circ$ , a četverokut  $FGHR$  je kvadrat pa su njegovi kutovi pravi, veličine  $90^\circ$ . Primjenom odgovarajućih pravila određuju se kutovi u trokutu  $\triangle AFE$ :

$$\angle AEF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ (vanjski kut trokuta } \triangle DEF \text{ pri vrhu } E),$$

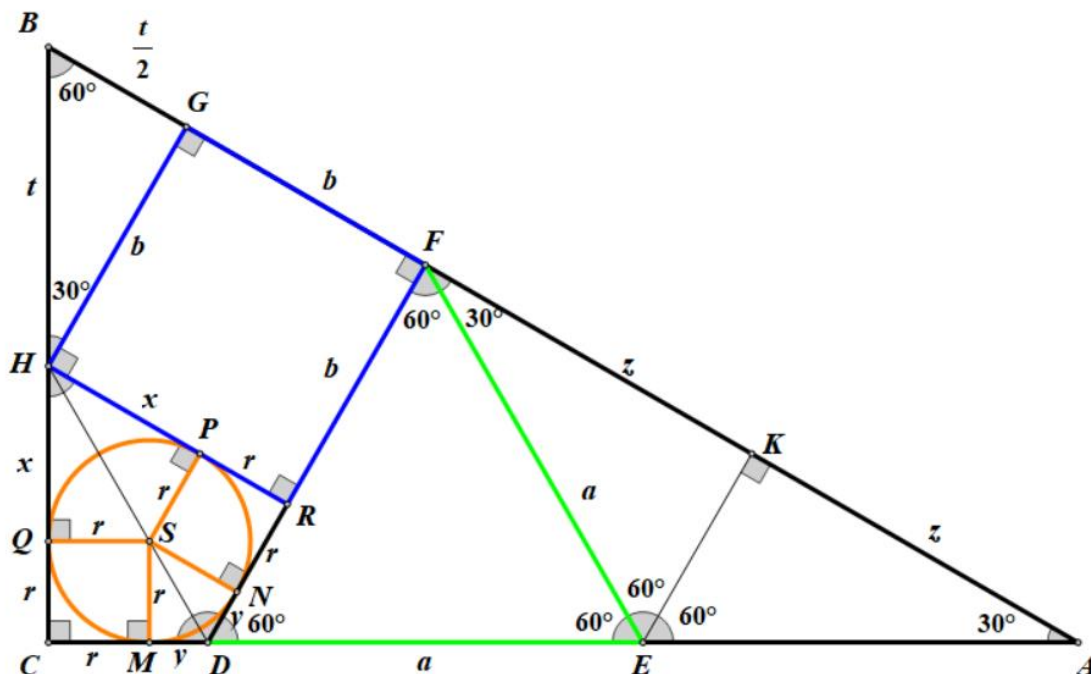
$$\angle EFA = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \text{ (nadopuna do ispruženog kuta pri vrhu } F)$$

$$\angle FAE = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \text{ (zbroj kutova unutar trokuta).}$$

Kako su kutovi prvi vrhovima  $A$  i  $F$  trokuta  $\triangle AFE$  jednakih veličina (po  $30^\circ$ ), nasuprotne stranice jednakih u duljina pa vrijedi:  $|AE| = |EF| = a$ , što znači da je trokut  $\triangle AFE$  jednakokrtačan.

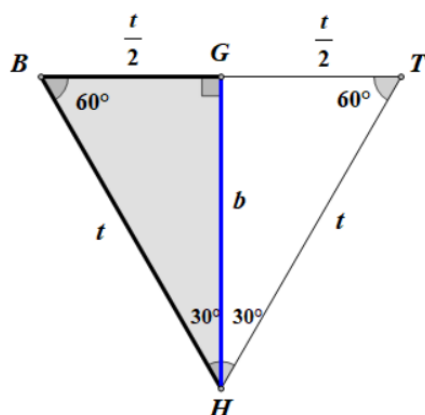
Trokut  $\triangle ABC$  je pravokutan s pravim kutom pri vrhu  $C$ , a kako je šiljasti kut pri vrhu  $A$  veličine  $30^\circ$ , njegov drugi šiljasti kut pri vrhu  $B$  je veličine  $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .





Slika 38. Slika Problema 6 s oznakama

Trokut  $\triangle BHG$  je pravokutan s pravim kutom pri vrhu  $G$  (susjedni kut pravog kuta kvadrata  $FGHR$ ), a kako je šiljasti kut pri vrhu  $B$  veličine  $60^\circ$ , njegov drugi šiljasti kut pri vrhu  $H$  veličine je:  $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . To znači da je trokut  $\triangle BHG$  polovica jednakostraničnog trokuta. Ako je njegova hipotenuza  $\overline{BH}$  duljine  $t$ , onda je kraća kateta  $\overline{BG}$  duljine  $\frac{t}{2}$ , a duža kateta  $\overline{GH}$  je stranica kvadrata  $FGHR$  duljine  $b$ .



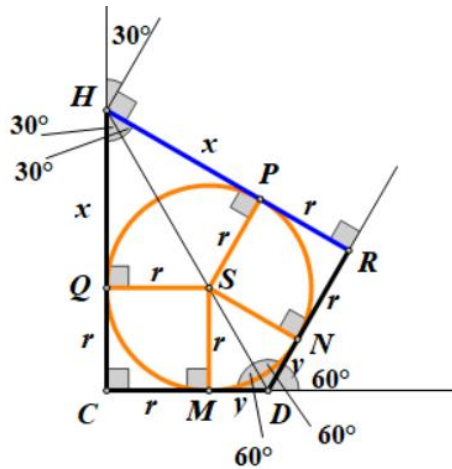
Slika 39. Nadopuna  $\triangle BHG$  do jednakostraničnog trokuta

Nadopunjavanjem trokuta  $\triangle BHG$  zrcalno do trokuta  $\triangle BHT$  (Slika 39.) dobiva se jednakostranični trokut stranice duljine  $t$ , kojemu je dužina  $\overline{GH}$  visina duljine  $b$  pa vrijedi:

$$b = \frac{t\sqrt{3}}{2}. \text{ Iz tog odnosa slijedi da je } t = \frac{2}{\sqrt{3}}b, \text{ odnosno nakon racionaliziranja, } t = \frac{2\sqrt{3}}{3}b \text{ i}$$

$$\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}b. \text{ Prema tome, stranice trokuta } \triangle BHG \text{ su: } |BH| = t = \frac{2\sqrt{3}}{3}b, |BG| = \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}b \text{ i } |GH| = b.$$

Četverokutu  $CDRH$  upisana je kružnica radijusa  $r$  pa je tangencijalan te je zbroj nasuprotnih kutova tog četverokuta  $180^\circ$ .



**Slika 40.** Tangencijalni četverokut  $CDRH$

Unutarnji kut četverokuta  $CDRH$  prvi vrhu  $C$  je pravi kut (kut trokuta  $\triangle ABC$ ), kao i kut pri vrhu  $R$  (susjedni kut pravog kuta kvadrata  $FGHR$ ). Unutarnji kut pri vrhu  $D$  je vanjski kut trokuta  $\triangle AFD$  pa je on veličine  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ , pa unutarnji kut pri vrhu  $H$  iznosi  $180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

Kako su odsječci tangenti na kružnicu povučeni iz točke izvan kružnice (u ovom slučaju iz vrhova četverokuta  $CDRH$ ) jednakih duljina vrijedi:

$$|QC| = |CM| = r \text{ jer je } QCMS \text{ kvadrat i } |PR| = |RN| = r \text{ jer je } PSNR \text{ kvadrat}$$

$$|MD| = |DN| = y \text{ i } |HQ| = |HP| = x.$$

Dijagonala  $\overline{HD}$  dijeli četverokut  $CDRH$  na dva sukladna trokuta,  $\triangle CDH \cong \triangle DRH$ , prema poučku  $SKS$  jer se trokuti podudaraju u dvije stranice i kutu među njima:

$$\begin{aligned} |HC| &= |HR| = x + r \\ \angle DCH &= \angle HRD = 90^\circ \\ |CD| &= |DR| = y + r. \end{aligned}$$

Iz sukladnosti slijedi da dijagonala  $\overline{HD}$  raspolaavlja kutove pri vrhovima  $H$  i  $D$  pa su trokuti  $\triangle CDH$  i  $\triangle DRH$  pravokutni trokuti sa šiljastim kutovima od  $30^\circ$  i  $60^\circ$ .

Kako je  $x + r = b$ , slijedi da je  $|HC| = |HR| = |HG| = b$  pa su trokuti  $\triangle CDH$  i  $\triangle DRH$  sukladni s trokutom  $\triangle BGH$  po poučku  $KSK$  jer se podudaraju u jednoj stranici i kutovima uz tu stranicu. Iz sukladnosti i prethodno izvedenih jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} |DH| &= |BH| = t = \frac{2\sqrt{3}}{3}b \\ |CD| &= |DR| = |BG| = \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}b. \end{aligned}$$

Prema prethodnoj analizi može se odrediti duljina  $a$  stranice jednakostraničnog trokuta  $\triangle EFD$  jer vrijedi:

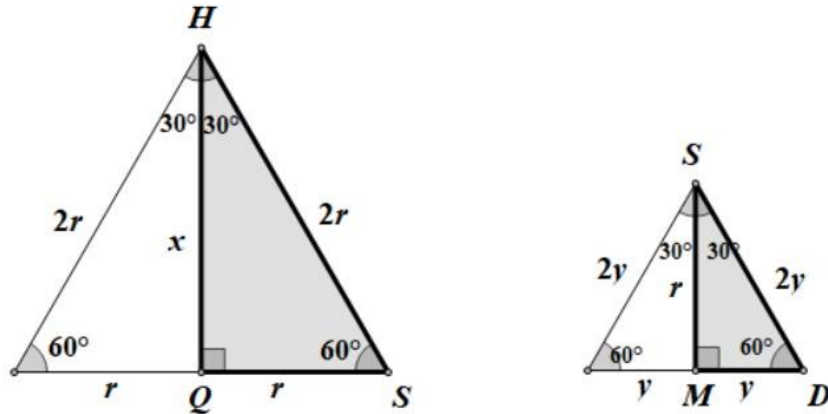
$$a = |FD| = |FR| + |RD| = b + \frac{t}{2} = b + \frac{\sqrt{3}}{3}b = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)b.$$

Ako se u jednakokračnom trokutu  $\triangle AFE$  spusti visina  $\overline{EK}$  na osnovicu  $\overline{AF}$ , dobivaju se dva pravokutna trokuta koji su polovice jednakostraničnog trokuta stranice duljine  $a$ , a  $\overline{FK}$  je visina duljine  $z$  pa vrijedi (analogno kao kod trokuta  $\triangle BHT$ ):

$$\begin{aligned} z = |FK| &= \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)b = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)b \\ 2z &= (\sqrt{3} + 1)b. \end{aligned}$$

Za iskazivanje polumjera kružnice  $r$ , a zatim i stranica trokuta  $\triangle ABC$  preko stranice kvadrata  $FGHR$  duljine  $b$ , potrebno je izraziti duljine  $x$  i  $y$  preko duljine  $b$ . U tu svrhu se mogu promotriti trokuti  $\triangle HQS$  i  $\triangle MDS$ . Oba trokuta su pravokutna sa šiljastim kutovima  $30^\circ$  i  $60^\circ$  pa su i oni polovice jednakostraničnih trokuta.

Nadopunjavanjem trokuta  $\Delta HQS$  dobiva se jednakostranični trokut stranice duljine  $2r$ , kojemu je visina duljine  $x$  pa vrijedi:  $x = \frac{2r\sqrt{3}}{2}$ , odnosno  $x = r\sqrt{3}$ . Analogno, nadopunjavanjem trokuta  $\Delta MDS$  dobiva se jednakostranični trokut stranice duljine  $2y$ , kojemu je visina duljine  $r$  pa vrijedi:  $r = \frac{2y\sqrt{3}}{2}$ , odnosno  $r = y\sqrt{3}$ , odakle se dobiva  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}r$  (Slika 41.).



Slika 41. Nadopuna trokuta  $\Delta HQS$  i  $\Delta MDS$

Kako je  $b = x + r = r\sqrt{3} + r = r(\sqrt{3} + 1)$ , za radijus kružnice  $r$  dobiva se  $r = \frac{b}{\sqrt{3} + 1}$  te nakon racionaliziranja:  $r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}b$  pa je promjer kružnice duljine:  $2r = (\sqrt{3} - 1)b$ .

Konačno, na temelju svih izvedenih izraza, stranice trokuta  $\Delta ABC$  mogu se izraziti preko stranice kvadrata  $FGHR$  duljine  $b$ :

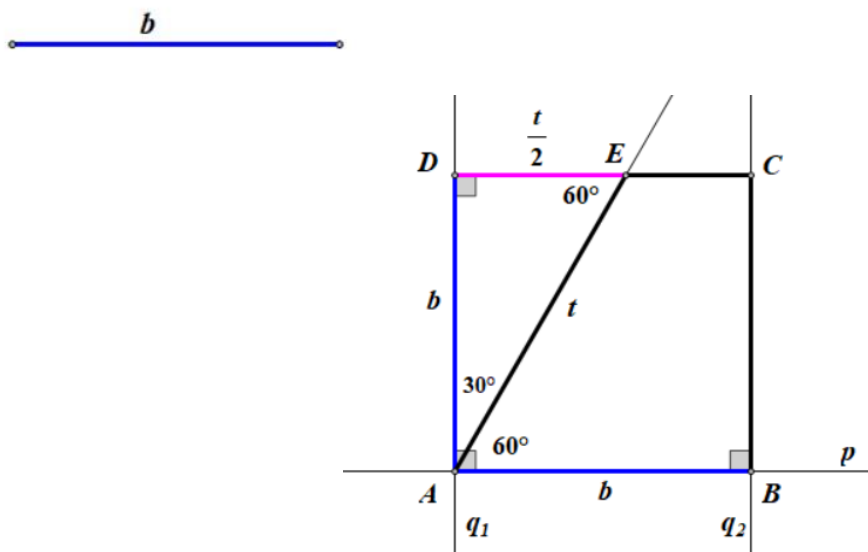
$$|AB| = \frac{t}{2} + b + 2z = \frac{\sqrt{3}}{3}b + b + (\sqrt{3} + 1)b = 2b + \frac{4\sqrt{3}}{3}b$$

$$|AC| = 2a + \frac{t}{2} = 2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)b + \frac{\sqrt{3}}{3}b = 2b + \frac{2\sqrt{3}}{3}b + \frac{\sqrt{3}}{3}b = 2b + \sqrt{3}b$$

$$|BC| = b + t = b + \frac{2\sqrt{3}}{3}b.$$

**Konstrukcija:** Neka je zadana dužina duljine  $b$ . Konstrukcija se temelji na izvedenim odnosima svih potrebnih duljina preko duljine  $b$ . Prvo se konstruiraju sve potrebne dužine duljina  $t$ ,  $\frac{t}{2}$ ,  $a$  i  $z$ , zatim dužine koje odgovaraju stranicama trokuta  $\triangle ABC$  i konačno, cijela sangaku figura.

**Prvi dio:** konstrukcija kvadrata stranice duljine  $b$  i dužina duljine  $t$  i  $\frac{t}{2}$  (Slika 43.).



**Slika 43.** Konstrukcija kvadrata  $ABCD$  i dužina duljina  $t$  i  $\frac{t}{2}$

- na proizvoljan pravac  $p$  prenese se dužina duljine  $b$  počevši od točke  $A$ ,  $|AB| = b$
  - u krajnjim točkama  $A$  i  $B$  konstruiraju se okomice  $q_1$  i  $q_2$  na pravac  $p$
  - na svaku okomicu prenese se dužina duljine  $b$ , od točaka  $A$  i  $B$ ,  $|AD| = b$  i  $|BC| = b$
- četverokut  $ABCD$  konstruiran na opisani način jest kvadrat stranice duljine  $b$
- zatim se iz vrha  $A$  konstruira kut od  $60^\circ$ , s pravcem  $p$  kao prvim krakom
  - drugi krak siječe stranicu kvadrata u točki  $E$ .

trokut  $\triangle AED$  je pravokutan sa šiljastim kutovima od  $30^\circ$  i  $60^\circ$  i vrijedi:

$$|AE| = t = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$$

$$|DE| = \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}b.$$

**Drugi dio:** konstrukcija dužina duljine  $a$  i  $2z$  te stranica trokuta  $\triangle ABC$  (Slika 44.).

Na proizvoljni pravac uzastopno se nanose dužine navedenih duljina:

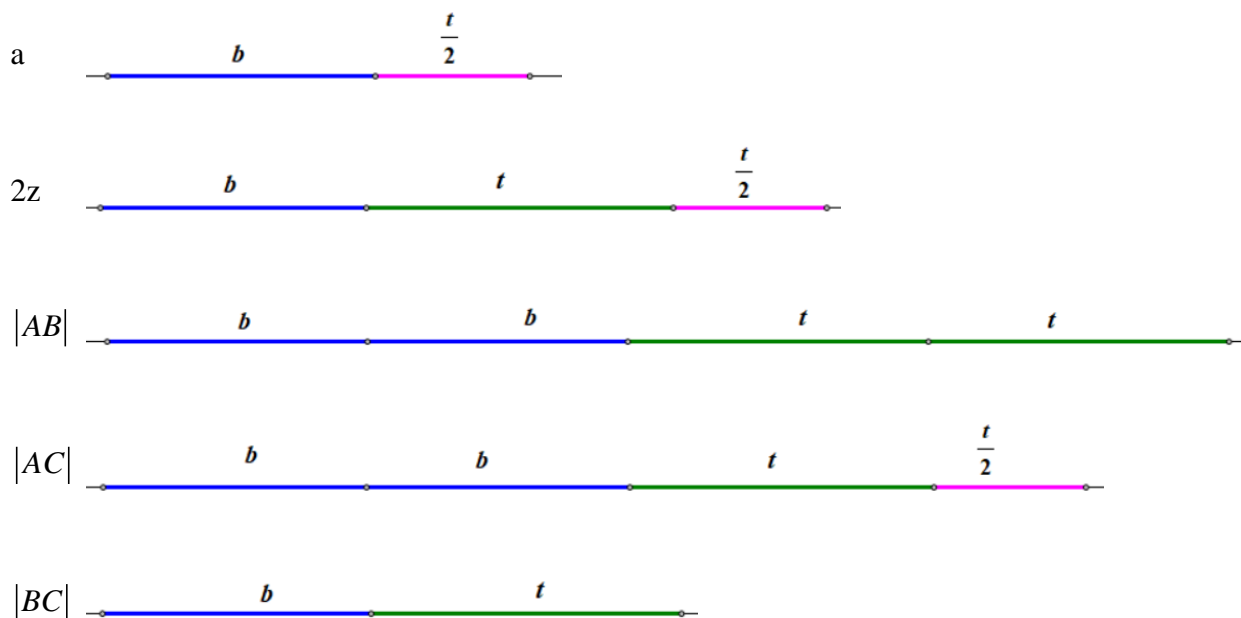
$$a = b + \frac{\sqrt{3}}{3}b = b + \frac{t}{2}$$

$$2z = b + \sqrt{3}b = b + t + \frac{t}{2}$$

$$|AB| = 2b + \frac{4\sqrt{3}}{3}b = 2b + 2t$$

$$|AC| = 2b + \sqrt{3}b = 2b + t + \frac{t}{2}$$

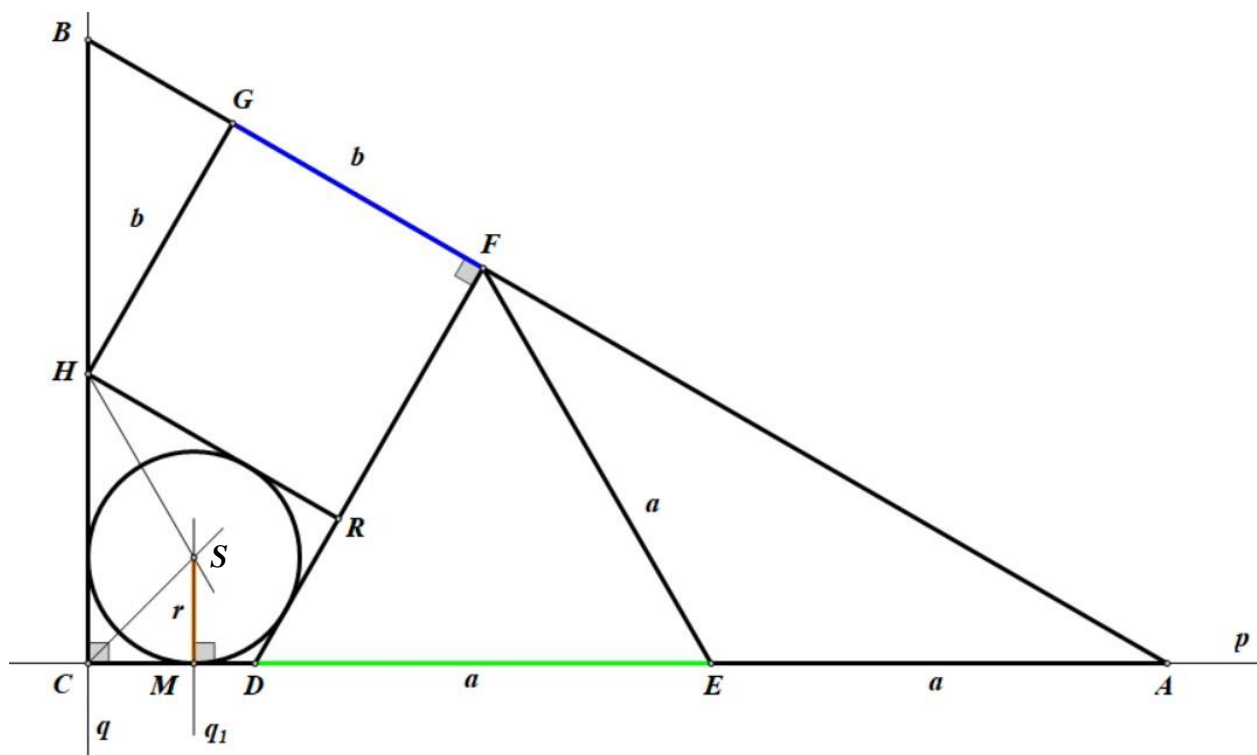
$$|BC| = b + \frac{2\sqrt{3}}{3}b = b + t$$



**Slika 44.** Konstrukcija dužina odgovarajućih duljina

**Treći dio:** konstrukcija cijele sangaku figure (Slika 45.)

Prvo se konstruira trokut  $\triangle ABC$  prema konstrukciji *SSS* jer su poznate duljine njegovih stranica:  $|AB|$ ,  $|AC|$  i  $|BC|$  ili prema *SKS* jer je jedan njegov kut pravi kut. Zatim se u njega upišu jednakostranični trokut  $\triangle FDE$  stranice duljine  $a$ , kvadrat  $FGHR$  stranice duljine  $b$  i konačno kružnica  $k(S, r)$ .



Slika 45. Konstrukcija sangaku figure 6

Konstrukcija pravokutnog trokuta  $\triangle ABC$ :

- na proizvoljan pravac  $p$  prenese se dužina duljine  $|AC|$  počevši od točke  $A$
- kroz točku  $C$  konstruira se okomica  $q$  na pravac  $p$
- na pravac  $q$  prenese se dužina duljine  $|BC|$  počevši od točke  $C$

Konstrukcija jednakostraničnog trokuta  $\triangle EFD$ :

- iz vrha  $A$  prenese se dužine duljine  $a$  na dužinu  $\overline{AC}$ ,  $|AE| = a$

- iz točke  $E$  opiše se kružnica radijusa  $a$ , koja stranicu  $\overline{AB}$  siječe u točki  $F$ , a stranicu  $\overline{AC}$  u točki  $D$   
 $\triangle DEF$  je jednakostranični trokut stranice duljine  $a$

Konstrukcija kvadrata  $FGHR$ :

- iz točke  $F$  opiše se kružnica radijusa  $b$ , koja siječe dužinu  $\overline{FB}$  u točki  $G$ , a dužinu  $\overline{FD}$  u točki  $R$
- Iz točke  $G$  ili  $R$  opiše se kružnica radijusa  $b$ , koja dužinu  $\overline{BC}$  siječe u točki  $H$   
Četverokut  $FGHR$  jest kvadrat stranice duljine  $b$

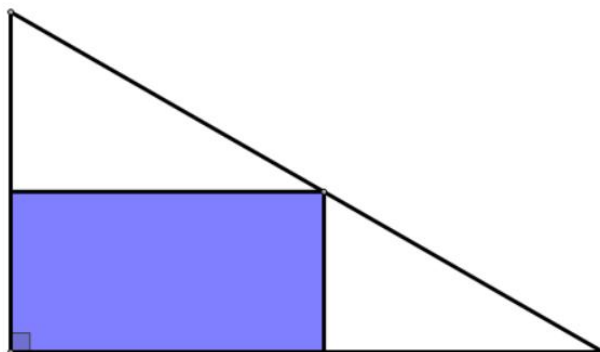
Konstrukcija kruga  $k(S, r)$ :

- simetralom dvaju kutova četverokuta  $CDRH$  dobiva se središte kružnice  $S$
- kroz točku središta  $S$  konstruira se okomica na jednu stranicu trokuta s nožištem  $M$ ,  
 $r = |SM|$  je radijus kružnice upisane četverokutu  $CDRH$ .
- Opiše se kružnica  $k(S, r)$

Opisanim postupkom konstruirana je zadana sangaku figura.



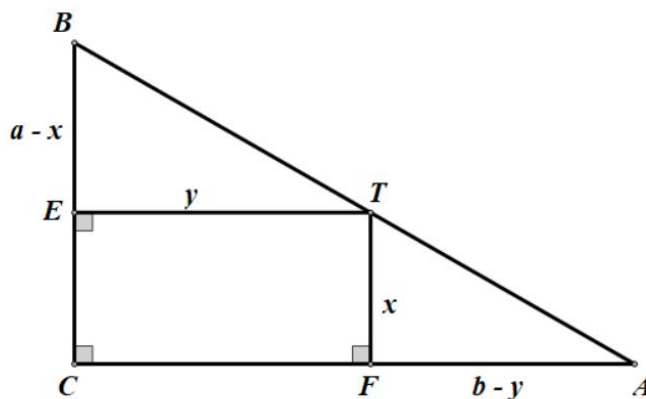
**4.7. Problem 7. Pravokutnik maksimalne površine unutra pravokutnog trokuta**



**Slika 46.** Problem 7 - Hokkaido Prefektura, 1806.

**Opis problema:** Na hipotenuzi pravokutnog trokuta odabrana je proizvoljna točka, a zatim su iz točke spuštene okomice na katete trokuta. Okomice s katetama trokuta zatvaraju pravokutnik. Odrediti položaj točke na hipotenuzi koja određuje pravokutnik maksimalne površine (Slika 46.).

**Rješenje:** Neka je dan pravokutni trokut  $\triangle ABC$  s katetama duljine  $|BC| = a$  i  $|AC| = b$ . Neka je  $T$  proizvoljna točka na hipotenuzi  $\overline{AB}$  i neka su  $E$  i  $F$  nožišta okomica spuštenih iz točke  $T$  na katete  $\overline{BC}$  i  $\overline{AC}$  redom. Neka je udaljenost točke  $T$  od katete  $\overline{AC}$  jednaka  $x$ , a udaljenost od katete  $\overline{BC}$  jednaka  $y$ , tj.  $|TF| = x$  i  $|TE| = y$  (Slika 47.).



**Slika 47.** Slika Problema 7 s oznakama

U skladu s uvedenim oznakama, četverokut  $CFTE$  je pravokutnik duljine  $y$  i širine  $x$  te mjera njegove površine iznosi  $P_{CFTE} = xy$ . Kako bi se odredio pravokutnik maksimalne površine, potrebno je odrediti udaljenosti  $x$  i  $y$  u odnosu na duljine kateta  $a$  i  $b$  redom, pravokutnog trokuta  $\triangle ABC$ .

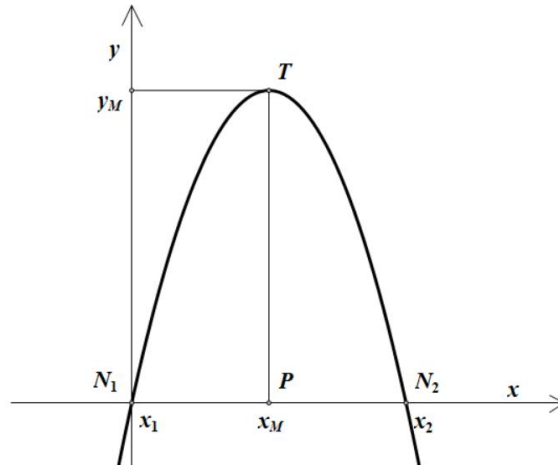
Povlačenjem okomica, unutar trokuta  $\triangle ABC$  nastala su dva manja pravokutna trokuta:  $\triangle BET$  s katetama duljina  $|BE| = a - x$  i  $|TE| = y$  te  $\triangle ATF$  s katetama duljina  $|AF| = b - y$  i  $|TF| = x$ . Ovi pravokutni trokuti slični su s polaznim trokutom prema poučku  $KK$  (jer imaju podudarne odgovarajuće kutove). Iz sličnosti trokuta  $\triangle BET$  i  $\triangle ABC$  može se uspostaviti odnos između udaljenosti  $x$  i  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{|TE|}{|AC|} &= \frac{|BE|}{|BC|} \\ \frac{y}{b} &= \frac{a-x}{a} \\ ay &= ab - bx \\ y &= b - \frac{b}{a}x.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem izvedenog odnosa u izraz za površinu pravokutnika  $CFTE$  dobiva se:

$$P_{CFTE} = x \cdot y = x \cdot \left( b - \frac{b}{a}x \right) = bx - \frac{b}{a}x^2 = \frac{b}{a}(ax - x^2).$$

Dobiveni se izraz može razmatrati kao kvadratna funkcija površine  $P$  po varijabli  $x$ :  $P(x) = \frac{b}{a}(ax - x^2)$ , pa se polazni problem svodi na pronalaženje maksimuma ove kvadratne funkcije. S obzirom na to da je vodeći koeficijent ove kvadratne funkcije negativan, graf funkcije je konkavan pa maksimum postoji (Slika 48.).



**Slika 48.** Graf funkcije površine

Kako je graf kvadratne funkcije simetričan s obzirom na pravac koji prolazi točkom maksimuma  $T(x_M, y_M)$ , koordinata  $x_M$  biti će koordinata i točke  $P(x_M, 0)$  koja je polovište dužine određene nul-točkama ove funkcije  $N_1(x_1, 0)$  i  $N_2(x_2, 0)$ , tj.  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .

Rješavanjem jednadžbe  $P(x) = 0$ , tj.  $\frac{b}{a}(ax - x^2) = 0$  određuju se koordinate nul-točaka:

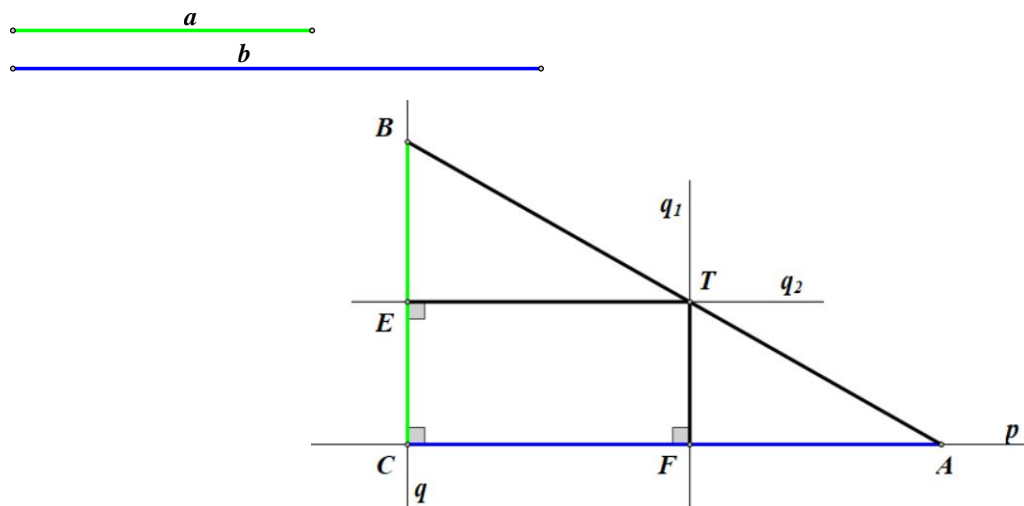
$x_1 = 0, x_2 = a$ , pa je koordinata točke polovišta:  $x_M = \frac{a}{2}$ . To znači da funkcija  $P$  maksimum postiže

za  $x_M = \frac{a}{2}$  i maksimalna površina iznosi  $y_M = P(x_M) = P\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ab}{4} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$ .

Drugim riječima, pravokutnik  $CFTE$  imat će maksimalnu površinu kada je udaljenost  $x$  jednaka polovici katete  $\overline{BC}$ , tj.  $x = \frac{a}{2}$ , a udaljenost  $y$  jednaka polovici katete  $\overline{AC}$ , tj.  $y = \frac{b}{2}$ .

Budući da su razmatrani pravokutni trokuti međusobno slični, može se zaključiti da će točka  $T$  koja se nalazi na polovici hipotenuze  $\overline{AB}$  polaznog trokuta osigurati da pravokutnik  $CFTE$  ima maksimalnu površinu.

**Konstrukcija:** Neka su zadane dvije dužine duljina  $a$  i  $b$  (Slika 49.)



Slika 49. Konstrukcija sangaku figure 7

Pravokutni trokut  $\Delta ABC$  konstruira se prema SKS konstrukciji:

- na proizvoljni pravac  $p$  prenese se dužina duljine  $b$  počevši od točke  $A$ ,  $|AC| = b$
  - kroz točku  $C$  konstruira se okomica  $q$  na pravac  $p$
  - na okomicu  $q$  prenese se dužina duljine  $a$  počevši od točke  $C$ ,  $|CB| = a$
- spajanjem vrhova  $A$  i  $B$  dobiva se  $\Delta ABC$ .

Konstrukcija proizvoljnog pravokutnika  $CFTE$ :

- na hipotenuzi  $\overline{AB}$  odabere se proizvoljna točka  $T$
  - kroz točku  $T$  konstruiraju se okomice  $q_1$  i  $q_2$  na katete  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$  s nožištima  $F$  i  $E$
- redom
- okomice s katetama zatvaraju pravokutnik  $CFTE$ .

Konstrukcija pravokutnika  $CFTE$  maksimalne površine:

- konstruiraju se simetrale stranica  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$ , a time i polovišta  $F$  i  $E$  redom
  - simetrale se sijeku u polovištu hipotenuze  $T$  (središte trokutu opisane kružnice)
- simetrale s katetama zatvaraju pravokutnik  $CFTE$ .

## 5. Zaključak

Cilj ovoga rada bio je predstaviti jedinstveni kulturni fenomen poznat pod nazivom *sangaku*, kojeg karakteriziraju spoj kulture, povijesti, matematike i lingvistike. Po Makami i Smith, 1914., str. 279.:

„...matematika Japana bila je poput njezine umjetnosti,  
više izuzetna nego veličanstvena...“

Na samom početku dan je povijesni prikaz Japana u vrijeme stvaranja *sangaku* ploča kroz opis karakteristika Edo razdoblja i života Japana u vrijeme samonametnute izolacije od ostatka svijeta kao i kroz poveznicu *sangaku* ploča i zavjetnih darova, koji su se prinosili šintoističkim svetištima i budističkim hramovima. Budući da je *sangaku* jedna vrsta umjetnosti kao i haiku poezija, istaknute su poveznice i ovih dviju vrsta umjetnosti i njihov značaj u Japanu, ali i ostatku svijeta, sve u svrhu približavanja konteksta i okolnosti unutar kojeg je nastao *sangaku*.

Središnja tema rada su odabrani geometrijski *sangaku* problemi, koji potječu iz različitih prefektura Japana. Svaki od sedam odabranih problema obrađen je strukturno slično kao na *sangaku* pločama: predstavljanje problema kroz odgovarajući umjetnički izričaj, mjesto i godinu izlaganja originalne ploče, opis problema te odnos koji je potrebno otkriti ili obrazložiti. Doprinosa ovog rada je u detaljnom opisu rješavanja problema korištenjem elementarnih geometrijskih znanja te prikazu konstrukcije *sangaku* figura uz opis procesa konstruiranja po koracima.

Japanski profesor matematike Hidetoshi Fukagawa gotovo je sam razvio i popularizirao *sangaku* probleme nakon što su nestali iz fokusa razmatranja te ponovno uspostavio matematičku, povijesnu i kulturološku važnost *sangakua* u Japanu, unatoč mnogim preprekama. Danas se, prema Katsuhitou, *sangaku* smatra nacionalnim kulturnim dobrom, a zahvaljujući profesoru Hidetoshiju *sangaku* svojim matematičkim specifičnostima i umjetničkim izričajima ne nadahnjuje samo matematičare već i umjetnike. *Sangaku* tako ponovno postaje elegantna i lijepa tradicija koja je korisna i u današnjoj nastavi matematike, jer ima snagu pobuditi intelektualnu znatiželju učenika i omogućiti razvoj dubljeg zanimanja za matematiku.

Svatko tko se upusti u strpljivo i ustrajno istraživanje i rješavanje geometrijskih *sangaku* problema s vremenom razvija svoje vizualne sposobnosti i *geometrijsko oko*, usavršava i funkcionalno povezuje različita matematička znanja iako se u početku to možda čini nedostižnim.

## Sažetak

U radu se predstavljaju *sangakui* – drvene ploče s matematičkim zapisima koje su postavljane diljem Japana pod krovništa hramova kao zavjetni darovi ili zahvale bogovima na matematičkim postignućima. Sangaku ploče nastale su u vrijeme Edo razdoblja kojeg karakterizira mir i samonametnuta izolacija Japana od ostatka svijeta. Tijekom Edo razdoblja dolazi do snažnog razvoja autohtone znanosti i umjetnosti, a taj period poznatiji je kao Genroku renesansa. Stoga, u svrhu boljeg razumijevanja nastanka i važnosti sangaku ploča prvo se u radu razmatraju povijesno-kulturni aspekti Japana toga vremena, a zatim se opisuju sadržaji sangaku ploča kako bi se moglo prijeći na središnju temu ovoga rada. U središnjem dijelu rada obrađuje se sedam odabranih *geometrijskih sangaku problema* sa ploča iz različitih prefektura poredanih prema zahtjevnosti i vrstama koncepata koji su u njima zastupljeni, a odabrani su tako da slijede geometrijski kurikulum elementarnog matematičkog obrazovanja. Problemi se obrađuju tako da prate strukturiranje i vizualno oblikovanje na pločama, a daje se i detaljan prikaz procesa rješavanja, što na originalnim pločama nije postojalo, vjerojatno zbog nedovoljno prostora ili zbog izazova čitateljima. Kako bi se došlo da rješenja problema, figure su konstruirane, zatim je konstrukcija provedena unutar programa dinamičke geometrije, a opis procesa konstruiranja u radu je opisan po koracima. Iako je za otkrivanje odnosa unutar odabranih sangaku problema potrebno suptilno razumijevanje geometrijskih koncepata i vještina rješavanja geometrijskih problema, oni se mogu prepoznati korištenjem samo elementarnih matematičkih znanja koja se stječu unutar osnovnoškolskog matematičkog obrazovanja pa ovaj rad može poslužiti kao koristan nastavni materijal svakom zainteresiranom učitelju matematike.

**Ključne riječi:** *sangaku ploča, sangaku problem, rješavanje problema, konstrukcija sangaku figure*

## Abstract

This paper represents sangaku – wooden boards with mathematical writings that were placed under the roofs of temples all over Japan as votive gifts or thanks to the gods for mathematical achievements. Sangaku boards were created during the Edo period, which was characterized by peacetime and self-imposed isolation of Japan from the rest of the world. During the Edo period, there was a strong development of indigenous science and art, and that period was better known as the Genroku renaissance. Therefore, in order to understand better the origin and importance of sangaku boards, the paper first considers the historical and cultural aspects of Japan at that time, then describes the contents of sangaku boards in order to move on to the central topic of this paper which focuses on seven *selected geometric sangaku problems* which originate from different prefectures. In this paper, sangaku problems are ordered by complexity and concepts that are represented within them, which follow the geometrical curriculum of elementary mathematical education. The problems venerate the structure and visual design on original wooden boards, but unlike original boards, a detailed description of the solving process is given in this paper. Solutions probably weren't given on the original boards due to insufficient space or in order to challenge the readers. In order to find a solution to the problem, the figures were constructed, then the construction was made in the programme of dynamic geometry while the description itself follows the real process of construction step by step. Although subtle understanding of geometric concepts and geometric solving skills are required for solving sangaku problems, they can be solved using only elementary mathematical knowledge acquired within elementary school mathematics education, so this work can be useful teaching material for any interested mathematics teacher.

**Key words:** *sangaku board, sangaku problem, problem-solving, sangaku figure construction*

## 6. Literatura i izvori

- Bai C. (2013). Sangaku. *How to draw those three circles with only a ruler and a compass?* <https://math.stackexchange.com/questions/269951/sangaku-how-to-draw-those-three-circles-with-only-a-ruler-and-a-compass>. Pristupljeno 15.6.2023.
- Britannica. (2023). Haiku. <https://www.britannica.com/art/haiku>. Pristupljeno 1.7.2023.
- Britannica. (2023). Matsuo Bashō. <https://www.britannica.com/summary/Basho-Japanese-poet>. Pristupljeno 18.6.2023.
- Devide, V. (2010). *Čudesna matematika: pogled iznutra i izvana*. Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo
- Fameli R. (2020). Math 400: Sangaku, Japanese temple geometry. Dostupno na: <https://cklxxx.people.wm.edu/teaching/math400/Fameli.pdf> Pristupljeno 2.6.2023.
- Fukagawa, H. & A. Rothman, A. (2008). *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*. Princeton University Press: New Jersey.
- HistoryASM. (2011) Dejima: japan's only connection to the outside world. <http://historyasm.blogspot.com/2011/06/dejima-deep-space-nine-of-feudal-japan.html>. Pristupljeno 28.6.2023.
- Jackowski T. (2023) Haiku poezija – Bashō. Takase Studios, LLC <https://www.takase.com/shop/japanese-scrolls-kakemono/haiku/basho-summer-grass-all-the-warriors-are-but-the-remains-of-dreams-natsukusa-ya-tsuwamono-domo-ga-yume-no-ato/>. Pristupljeno 1.7.2023.
- <https://www.takase.com/shop/japanese-scrolls-kakemono/haiku/basho-as-the-temple-bell-fades-the-ringing-lingers-in-the-blossom-scent-evening-kane-kiete-hana-no-ka-wa-tsukuyuube-kana/>. Pristupljeno 1.7.2023.
- Kabić, M. (2012). Sangaku problemi – geometrijski problemi u japanskim hramovima - 1. dio. *Matematika i škola*, 13, 64; 160-167.
- Katsuhito S. (2017). *Sangaku: Sacred mathematics in Japan*. University of California, Santa Cruz. Dostupno na: [https://escholarship.org/content/qt7d97v5bj/qt7d97v5bj\\_noSplash\\_5d12fbfeaf4ddac1c6a753138a62bc2a.pdf](https://escholarship.org/content/qt7d97v5bj/qt7d97v5bj_noSplash_5d12fbfeaf4ddac1c6a753138a62bc2a.pdf). Pristupljeno 7.7.2023.



- Makishita H. (2011). Solving Problems from Sangaku with Technology. University of Tsukuba, Japan. Dostupno na: [https://atcm.mathandtech.org/ep2010/regular/3052010\\_18601.pdf](https://atcm.mathandtech.org/ep2010/regular/3052010_18601.pdf) Pristupljeno 5.7.2023.
- Rothman T, Fukagawa H. (1998). Japanese temple geometry. *Scientific American*. Vol 278. No 5, pp. 84-91
- Smith D. E. & Mikami Y. (1914). *A History of Japanese Mathematics*, Dover.
- Vincent J. & Vincent C. (2004). Japanese temple geometry. University of Melbourne. Dostupno na: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ720042.pdf> Pristupljeno 12.7.2023.

## 7. Popis ilustracija

**Slika 1.** *Gougu teorem*

**Slika 2.** Svetište Kaizu Tenman, sangaku ploča iz 1875. pod krovijem hrama

**Slika 3.** Svetište Takemizuwake, Nagano Prefektura

**Slika 4.** *Jinkoki* – Mali i veliki brojevi

**Slika 5.** Matematičar Seki Takakazu

**Slika 6.** Otok Deshima

**Slika 7.** Haiku poezija – Bashō

**Slika 8.** Vizualni prikaz prvog japanskog teorema

**Slika 9.** Vizualni prikaz drugog japanskog teorema

**Slika 10.** Vizualni prikaz trećeg japanskog teorema

**Slika 11.** Problem 1 - Fukushima prefektura, 1883.

**Slika 12.** Slika Problema 1 s oznakama

**Slika 13.** Konstrukcija dužine duljine  $a\sqrt{2}$

**Slika 14.** Konstrukcija sangaku figure 1

**Slika 15.** Problem 2 - Miyagi prefektura, 1892.

**Slika 16.** Slika Problema 2 s oznakama

**Slika 17.** Izdvojeni trokut  $\Delta S_1ES_2$

**Slika 18.** Konstrukcija dužine duljine  $d = 2\sqrt{Rr}$

**Slika 19.** Konstrukcija sangaku figure 2

**Slika 20.** Problem 3 - Gunma Prefektura, 1824.

**Slika 21.** Slika Problema 3 s oznakama

**Slika 22.** Izdvojeni pravokutni trokuti  $\Delta S_1PS$  i  $\Delta S_2SQ$

**Slika 23.** Polumjeri (promjeri) duljina  $R$  i  $r$

**Slika 24.** Konstrukcija kružnice koja dira dvije kružnice i njihovu zajedničku tangentu

**Slika 25.** Problem 4 - Okayama prefektura, 1873.

**Slika 26.** Slika Problema 4 s oznakama

**Slika 27.** Izdvojeni pravokutni trokut  $\triangle CHT$

**Slika 28.** Konstrukcija dužine duljine  $a = \frac{2}{5}r$

**Slika 29.** Konstrukcija sangaku figure 4

**Slika 30.** Problem 5 - Iwate prefektura, 1847.

**Slika 31.** Slika Problema 5 s oznakama

**Slika 32.** Izdvojeni trokut  $\triangle KLM$

**Slika 33.** Izdvojeni trokut  $\triangle AED$

**Slika 34.** Izdvojeni trokut  $\triangle BFE$

**Slika 35.** Konstrukcija polumjera upisanih kružnica

**Slika 36.** Konstrukcija sangaku figure 5

**Slika 37.** Problem 6 - Fukushima prefektura, 1877.

**Slika 38.** Slika Problema 6 s oznakama

**Slika 39.** Nadopuna  $\triangle BHG$  do jednakostraničnog trokuta

**Slika 40.** Tangencijalni četverokut  $CDRH$

**Slika 41.** Nadopuna trokuta  $\triangle HQS$  i  $\triangle MDS$

**Slika 42.** Stranica kvadrata duljine  $b$

**Slika 43.** Konstrukcija kvadrata  $ABCD$  i dužina duljina  $t$  i  $\frac{t}{2}$

**Slika 44.** Konstrukcija dužina odgovarajućih duljina

**Slika 45.** Konstrukcija sangaku figure 6

**Slika 46.** Problem 7 - Hokkaido Prefektura, 1806.

**Slika 47.** Slika Problema 7 s oznakama

**Slika 48.** Graf funkcije površine

**Slika 49.** Konstrukcija sangaku figure 7

# Prilozi

Obrazac A.Č.

SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FILOZOFSKI FAKULTET

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

kojom ja Ana Cicvarić, kao pristupnik/pristupnica za stjecanje zvanja magistrice primarnoga obrazovanja s pojačanim modulom ranoga učenja engleskoga jezika, izjavljujem da je ovaj završni/diplomski rad rezultat isključivo mogega rada, da se temelji na mojim istraživanjima i oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i literatura. Izjavljujem da ni jedan dio završnoga/diplomskoga rada nije napisan na nedopušten način, odnosno da nije prepisan iz necitiranoga rada, stoga ne krši ničija autorska prava. Također izjavljujem da nijedan dio ovoga završnoga/diplomskoga rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Split, 21. rujna 2023.



Potpis

**IZJAVA O POHRANI ZAVRŠNOG/DIPLOMSKOGA RADA U DIGITALNI REPOZITORIJ  
FILOZOFSKOGA FAKULTETA U SPLITU**

Student/ica: Ana Cicvarić  
Naslov rada: Geometrijski sangaku problemi  
Znanstveno područje: Matematika  
Znanstveno polje: Obrazovne znanosti  
Vrsta rada: Diplomski rad  
Mentor/Mentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): dr. sc. Nives Baranović, v. pred.  
Komentor/Komentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): /  
Članovi Povjerenstva (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime):

1. doc. dr. sc. Lada Maleš, predsjednica
2. dr. sc. Nives Baranović, v. pred., član
3. Željka Zorić, v. pred., član

Ovom izjavom potvrđujem da sam autor/autorica predanoga završnoga/diplomskoga rada (zaokružite odgovarajuće) i da sadržaj njegove elektroničke inačice potpuno odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada. Slažem se da taj rad, koji će biti trajno pohranjen u Digitalnom repozitoriju Filozofskoga fakulteta Sveučilišta u Splitu i javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama *Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju*, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15, 131/17), bude:

a) u otvorenom pristupu

b) dostupan studentima i djelatnicima FFST-a

c) dostupan široj javnosti, ali nakon proteka 6 mjeseci / 12 mjeseci / 24 mjeseca (zaokružite odgovarajući broj mjeseci).

(zaokružite odgovarajuće)

U slučaju potrebe (dodatnoga) ograničavanja pristupa Vašemu ocjenskom radu, podnosi se obrazloženi zahtjev nadležnomu tijelu u ustanovi.

Split, 21. rujna 2023.

Mjesto, nadnevak



Potpis studenta/ice