SMISAO MATEMATIČKOG DOKAZA

Šerić, Mia

SVEUČILIŠTE U SPLITU

FILOZOFSKI FAKULTET

DIPLOMSKI RAD

SMISAO MATEMATIČKOG DOKAZA

MIA ŠERIĆ

Split, 2022.

Odsjek: Učiteljski studij

Studij: Integrirani preddiplomski i diplomski učiteljski studij

SMISAO MATEMATIČKOG DOKAZA

Studentica:
Mia Šerić

Mentorica:
v. pred. Nives Baranović, prof.

Split, rujan 2022.

Sadržaj

1. Uvod

Dokaz ima središnju ulogu u razvoju, utvrđivanju i prenošenju matematičkoga znanja (Rocha, 2019). Ipak, u školskoj matematici nije središnji element iako se smatra kako dokazi pomažu učenicima da razviju matematičko i logičko zaključivanje potrebno u osposobljavanju učenika za kritičko promišljanje i samostalno djelovanje u životu.

S obzirom da je u matematici neophodno dokazati istinitost svake izvedene tvrdnje, jer se bez toga ona ne prihvaća kao istinita, te da se dokaz temelji na aksiomima, definicijama ili ranije dokazanim tvrdnjama, na samom početku ovoga rada objašnjeni su sadržaji vezani uz aksiomatsku izgradnju matematičke teorije.

Nadalje se navodi što je to dokaz i sam proces dokazivanja te kakav dokaz može biti. I direktan i indirektan dokaz radi boljeg pojašnjenja potkrijepljeni su primjerima.

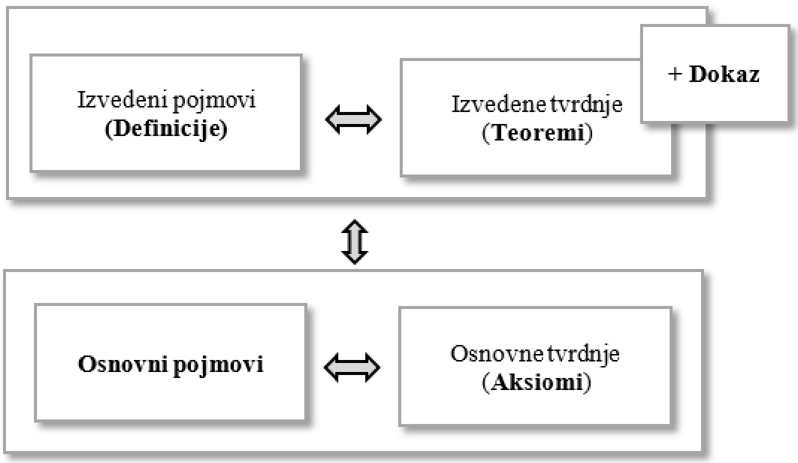
Dugo se vremena smatralo da je jedini smisao dokaza utvrđivanje istinitosti izvedenih tvrdnji, no praksa je pokazala kako dokaz ima višestruku važnost u matematici o čemu se razmatra u poglavlju o smislu dokaza u matematici.

Budući da su dokazi glavni nositelji matematičkog znanja, veoma su važni i u matematičkom obrazovanju. Stoga se ovaj rad u sljedećem poglavlju detaljnije bavi smislom matematičkog dokaza u nastavi matematike. Uloge dokaza u nastavi matematike su brojne, a u radu se detaljnije obrazlaže dokaz kao sredstvo: provjere ili uvjerenja u istinitost tvrdnje, objašnjenja istinitosti tvrdnje, otkrivanja i postavljanja novih tvrdnji, komunikacije, razvoja strategija te sistematizacije matematičkoga znanja. Za svaku od ovih uloga naveden je primjer kako se može provoditi na nastavi i time razvijati učeničke sposobnosti za navedeno. Iz svega opisanog vidljive su sličnosti i razlike uloge dokaza u matematici kao znanstvenoj disciplini i u matematici kao nastavnom predmetu.

Na samom kraju opisuju se tipične greške koje se javljaju u procesu dokazivanja, posebno kada znanja i vještine dokazivanja nisu dovoljno razvijene.

2. Aksiomatska izgradnja matematičke teorije

Aksiomatsku metodu izgradnje matematičke teorije postavio je još Euklid[1] pri sistematiziranju geometrijskih znanja svoga doba. Naime, pri izvođenju i dokazivanju istinitosti matematičkih spoznaja zahtijevalo se da se istinitost svakog korištenog argumenta treba opravdati nizom logičkih zaključaka, koji se temelje na već poznatim spoznajama. Zatim se istinitost njihovih argumenata trebaju opravdati na temelju spoznaja koji su poznati prije njih itd. Kako taj proces utvrđivanja istinitosti ne može ići u nedogled, moraju postojati spoznaje koje se prihvaćaju kao istinite i za koje dokaz nije potreban. To znači da je važno najprije odabrati tvrdnje koje su jasne i vjerodostojne, u čiju se istinitost ne sumnja, a zatim na temelju njih logičkim slijedom izvesti sve ostale tvrdnje. Tako odabrane polazne tvrdnje nazivaju se osnovnim tvrdnjama ili aksiomima, sam postupak izgradnje nekog područja na temelju aksioma naziva se aksiomatskom metodom, a sustav tvrdnji izgrađen aksiomatskom metodom naziva se deduktivnim sustavom (Courant i sur, 1996). Odabir aksioma ovisi o odabiru osnovnih pojmova koji su intuitivno jasni, na temelju kojih se dalje izvode svi ostali pojmovi i tvrdnje.



Slika 1. Aksiomatska izgradnja

U skladu s opisanim, aksiomatska izgradnja bilo koje matematičke discipline (Slika 1) započinje odabirom osnovnih pojmova, koji su intuitivno jasni pa ih nije potrebno definirati te formuliranjem osnovnih tvrdnji (aksioma) o danim osnovnim pojmovima, koje se smatraju istinitima pa ih nije potrebno dokazivati. Na temelju osnovnih pojmova i tvrdnji postupno se uvode novi pojmovi, nazvani izvedeni pojmovi, i nove tvrdnje, nazvane izvedene tvrdnje.

[1] Euklid, oko 340 – 287. godine prije Krista

Izvedeni pojmovi se opisuju definicijama u skladu s pravilima definiranja novog pojma, a svojstva pojmova i njihove veze opisuju se izvedenim tvrdnjama, čiju istinitost treba dokazati. Izvedene tvrdnje, koje su istinite nazivaju se teoremima (Baranović, 2018).

Kada se neka teorija aksiomatski izgrađuje, aksiomi tog sustava trebaju zadovoljavati tri principa: nezavisnost, neproturječnost i potpunost. Nezavisnost sustava aksioma podrazumijeva da niti jedan aksiom sustava ne može biti posljedica ostalih aksioma tog sustava. Ako bi pronašli neki aksiom ovisan o drugima, onda je on zapravo teorem, a ne aksiom. Neproturječnost (ili konzistentnost) sustava aksioma podrazumijeva da se iz sustava aksioma ne mogu istodobno izvesti dvije kontradiktorne tvrdnje (npr. da istodobno vrijedi neka tvrdnja i njezina negacija). Sustav aksioma i osnovnih pojmova je potpun, ako se na temelju njih može izgraditi jedna složena matematička teorija tako da je svaka tvrdnja te teorije ili njezina negacija dokaziva unutar te teorije (Baranović, 2018).

Za stjecanje matematičkih znanja potrebno je poznavati procese aksiomatske izgradnje te razvijati različite oblike mišljenja. Pod *procesima* aksiomatske izgradnje podrazumijevaju se *procesi definiranja* izvedenih pojmova, *procesi postavljanja tvrdnji* o svojstvima izvedenih pojmova i vezama među njima te *procesi dokazivanja* istinitosti postavljenih tvrdnji. Pod *mišljenjem* se podrazumijevaju određene umne aktivnosti kojima se spoznaje ono što do tada nije bilo poznato, procjenjuje se ispravnost onoga što se uočava ili se stvara zaključak o onome što se proučava. Različita znanja podrazumijevaju i različite oblike mišljenja. Tri su važna oblika mišljenja: poimanje, prosuđivanje i zaključivanje. Pod *poimanjem* se podrazumijeva stjecanje znanja o pojmovima kroz proces stvaranja predodžbe o pojmu. Pod *prosuđivanjem* se podrazumijeva otkrivanje svojstava pojmova, njihova prosudba te postavljanje tvrdnji o uočenim svojstvima. Pod *zaključivanjem* se podrazumijeva uspostavljanje veza među pojmovima i njihovim svojstvima korištenjem principa logičkog zaključivanja (Kurnik, 2013).

2.1. Matematički pojmovi

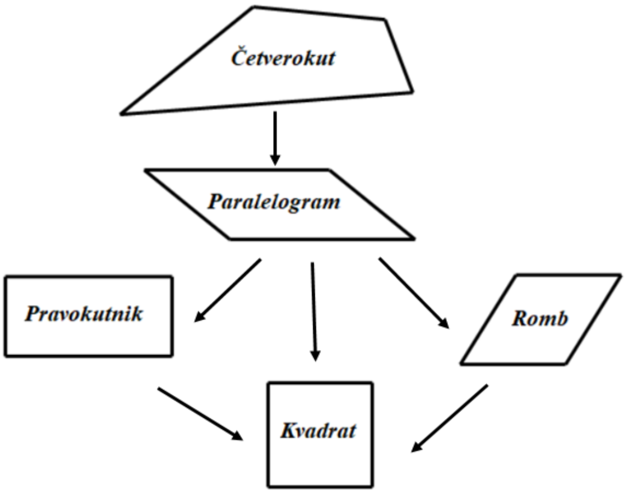
Pod *pojmom* se općenito podrazumijeva misao o bitnim karakteristikama onoga o čemu se misli. Misao je posljedica procesa mišljenja, a bitne karakteristike su ona obilježja koja su nužna i dovoljna za stvaranje valjane misli o promatranom pojmu. Sukladno tome, pod *matematičkim pojmom* podrazumijeva se misao o bitnim karakteristikama određenog matematičkog objekta (Baranović, 2018).

Kako je već opisano, matematički pojmovi se dijele na osnovne i izvedene pojmove. Osnovni pojmovi se ne opisuju pomoću drugih pojmova, niti se definiraju jer se smatraju intuitivno jasnima. Ipak, korisno je opisati što se pod njima podrazumijeva te na koji način se mogu predstaviti ili vizualno prikazati, kako ne bi došlo do različitih tumačenja. Osnovni pojmovi su npr. skup, sud, točka, pravac, ravnina. Za razliku od osnovnih pojmova, svi izvedeni pojmovi se trebaju jasno i precizno definirati korištenjem osnovnih pojmova ili ranije definiranih pojmova. Izvedeni pojmovi su npr. funkcija, prebrojiv skup, implikacija, dužina, trokut, valjak itd. (Baranović, 2018).

Pri definiranju izvedenih pojmova postoji odgovarajuća sloboda opisivanja, ali i zahtjevi kako bi definicija bila korektna i poticala valjanu misao o pojmu koji se definira. Svakako definicija pojma treba sadržavati nužne i dovoljne karakteristike pojma na temelju kojih se nedvosmisleno može utvrditi značenje novog pojma pomoću već poznatih pojmova. Osim navedenog, korektnost definicije postiže se i ispunjavanjem određenih zahtjeva, na primjer (Jozić, 2014):

1. Definicija treba biti jednoznačna i nedvosmislena.
2. Definicija treba zadovoljavati zahtjev minimalnosti, prirodnosti i suvremenosti sadržaja.
3. Definicija treba zadovoljavati zahtjev primjenjivosti i operativnosti.
4. Definicija ne bi trebala sadržavati negaciju, ako može biti afirmativna.
5. Definicija ne smije biti cirkularna.
6. Definicija može biti dogovorna i genetička.

Primjerice, postavljene su četiri definicije pojma *kvadrat* na temelju Slike 2: (1) *Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice jednakih duljina i svi unutarnji kutovi pravi.* (2) *Kvadrat je paralelogram kojemu su susjedne stranice jednakih duljina, a svi unutarnji kutovi pravi.* (3) *Kvadrat je romb, kojemu je jedan unutarnji kut pravi.* (4) *Kvadrat je pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednakih duljina.* Sve četiri definicije su ispravne, ali u posljednje dvije je korišteno manje bitnih karakteristika od ostalih dviju definicija jer su *pravokutnik* i *romb* bliži rodni pojmovi za pojam *kvadrat* od pojma *paralelogram* i *četverokut*. Ipak, zadnja definicija je prihvatljivija od predzadnje jer je *pravokutnik* prirodniji pojam za uvođenje pojma *kvadrat* od pojma *romb*. No, u primarnom obrazovanju ipak je najprimjerenija prva definicija jer učenici tog uzrasta još uvijek nemaju dovoljno znanja da bi uspostavljali inkluzivne odnose među pojmovima (Baranović, 2018).



Slika 2. Definiranje pojma *kvadrat*

Kada se postavi definicija nekog pojma odabirom bitnih karakteristika (nužna i dovoljna svojstva), sva ostala svojstva i njihove veze iskazuju se tvrdnjama. Kako se ne bi brkalo što je definicija pojma, a što tvrdnja o preostalim svojstvima tog pojma, koriste se i različite formulacije. Tako se u definicijama može koristiti izraz „naziva se“ ili „kaže se“, dok se tvrdnje mogu iskazivati u obliku „ako …, onda…“ (Kurnik, 2013).

2.2. Matematičke tvrdnje

Pod *tvrdnjom* se podrazumijeva smislena deklarativna rečenica ili matematički izraz koji je istinit ili lažan, pri čemu nešto treće nije moguće (lat. *tertium non datur*, isključenje trećeg) (Baranović, 2015). Prema danom opisu, znači da postavljanje tvrdnji podrazumijeva i ispitivanje njezine istinitosti. Kako je već opisano, matematičke tvrdnje dijele se na osnovne i izvedene. Osnovne tvrdnje ili aksiomi su tvrdnje čija je istinitost očigledna pa se istinitost aksioma ne dokazuje. Za razliku od aksioma, istinitost izvedenih tvrdnji nije očigledna pa se treba ispitati te potvrditi dokazom ili odbaciti. Izvedene tvrdnje mogu biti jednostavni sudovi, ali i složeni sudovi izvedeni logičkim operacijama na temelju jednostavnih sudova. Vješto formuliranje tvrdnji te postavljanje novih tvrdnji na temelju zadanih važno je i neophodno u procesu dokazivanja (Baranović, 2018).

2.2.1. Aksiomi

Osnovne tvrdnje ili aksiomi su činjenice o matematičkim objektima i njihovim odnosima u čiju se istinitost ne sumnja. Za njih se još kaže da su „očigledne istine“ jer je njihova istinitost naočigled intuitivno jasna (Kurnik, 2000).

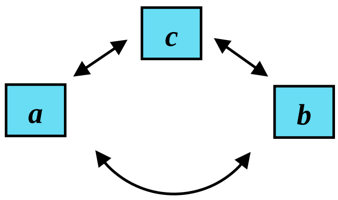
Pri sistematiziranju matematičkog znanja grčki matematičar Euklid u djelu *Elementi*[2] osnovne je tvrdnje dijelio na aksiome i postulate, a razlika je bila u tome što je postulatima nazivao osnovne tvrdnje geometrijskog karaktera, dok su se aksiomi koristili i šire. Danas se naziv postulat vrlo rijetko koristi, a osnovne tvrdnje nazivaju se samo aksiomima. Primjeri poznatih Euklidovih aksioma (Baranović, 2018):

Aksiom 1. *Cjelina je veća od svog dijela* (Slika 3).

$a+b>a$ $\qquad$ $a+b>b$

Slika 3. Odnos cjeline i njezinog dijela

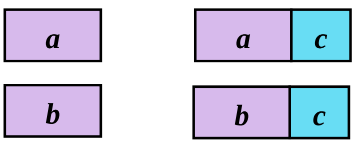
Aksiom 2. *Oni (objekti) koji su jednaki istom (objektu) jednaki su međusobno* (Slika 4).



$$\left.\begin{array}{l} a=c \\ b=c \end{array}\right\} \Rightarrow a=b$$

Slika 4. Vizualni prikaz i simbolički zapis Aksioma 2

Aksiom 3. *Ako se jednakim dijelovima (objektima) dodaju jednaki dijelovi (objekti), nastale cjeline bit će jednake* (Slika 5).



$$a=b \Rightarrow a+c=b+c$$

Slika 5. Vizualni prikaz i simbolički zapis Aksioma 3

[2] Djelo *Elementi* sastoji se od 13 knjiga, koristi se više od 2000 godina kao udžbenik iz geometrije i smatra se najprevođenijom knjigom nakon Biblije.

Aksiom 2 još se naziva i svojstvo tranzitivnosti, a može se koristiti u raznim područjima matematike. Na primjer, ako su dva kuta sukladna trećem kutu, onda su i polazni kutovi međusobno sukladni, ili, ako su dva skupa jednaka trećem skupu, onda su i polazni skupovi međusobno jednaki itd. Aksiom 3 se može koristiti u skupu realnih brojeva, npr. pri rješavanju jednadžbi, ali i u geometriji pri određivanju mjere površine itd. Svakako, primjena aksioma u različitim kontekstima može utjecati i na određene promjene. Na primjer, Aksiom 1 se ne može na jednak način interpretirati za konačne i za beskonačne skupove (Jozić, 2014).

2.2.2. Izvedene tvrdnje

Kao što je već navedeno, izvedene tvrdnje mogu biti istinite i neistinite, a one koje su istinite nazivaju se teoremi. Pojam *teorem* uzet je od grčke riječi *theorein* koja u prijevodu znači gledati, a razlog tome je što su prvi postavljeni teoremi dobiveni na temelju uočavanja geometrijskih figura. Ovisno o ulozi koju pojedina izvedena tvrdnja ima, pored naziva teorem koriste se i drugi nazivi: propozicije, leme i korolari. Naziv *propozicija* koristi se za tvrdnju za koju postoji kratki, jednostavni dokaz, a naziv *lema* koristi se za pomoćnu tvrdnju koja se koristi u dokazima drugih tvrdnji, najčešće u složenijim dokazima teorema. Naziv *korolar* koristi se za tvrdnju koja slijedi neposredno iz nekog teorema te se istinitost korolara jednostavno utvrđuje iz istinitosti tog teorema. U školskoj nastavi matematike, umjesto teorem za važne tvrdnje češće se koristi naziv *poučak*, npr. Pitagorin poučak (Baranović, 2018).

U izvedenoj tvrdnji treba biti jasno istaknuto uz koje se uvjete u njoj razmatra određeni objekt i što se o tome objektu tvrdi (Kurnik, 2000) pa se u formulaciji tvrdnji uvijek bitno razlikuju dva dijela: *pretpostavka* (oznaka *P*) i *zaključak* (oznaka *Q*). Pod *pretpostavkom* (P) se podrazumijeva jedna ili više izjava koje se smatraju istinitim i kojima se iskazuju uvjeti koji vrijede za promatrani objekt. Pod *zaključkom* (Q) se podrazumijeva izjava odnosno tvrdnja o promatranom objektu, koja posljedično slijedi na temelju pretpostavke. S obzirom da se iskaz tvrdnje može formulirati na različite načine, nije uvijek jednostavno razlikovati pretpostavku od zaključka, posebno kad se tvrdnja iskazuje u duhu govornoga jezika. Standardni oblik formuliranja tvrdnje je u obliku „**Ako** (vrijedi *P*), **onda** (vrijedi *Q*)“, simbolički $P \Rightarrow Q$. Drugim riječima, u iskazu pretpostavka započinje s „Ako …“, na što se dodaje zaključak s „onda …“. Na primjer, neka je dana sljedeća tvrdnja:

Tvrdnja 1 (Baranović, 2018). *Umnožak* $a \cdot b$ *dvaju prirodnih brojeva djeljiv je nekim prirodnim brojem c kada je barem jedan od faktora tog umnoška djeljiv brojem c.*

Kako bi se tvrdnja iskazala u standardnom obliku potrebno je prepoznati što je pretpostavka (*P*), a što zaključak (*Q*) tvrdnje. U ovom slučaju, *P* je iskazan u drugom dijelu rečenice, a *Q* u prvom dijelu:

(*P*) Zadana su dva prirodna broja a i b od kojih je barem jedan djeljiv prirodnim brojem *c*.

(Q) Umnožak brojeva $a \cdot b$ je djeljiv prirodnim brojem *c*.

Preformulirano, tvrdnja u standardnom obliku glasi: *Ako je barem jedan od prirodnih brojeva* a *i* b *djeljiv prirodnim brojem* c*, onda je i umnožak tih brojeva* $a \cdot b$ *djeljiv brojem* c. Na temelju nekoliko primjera može se naslutiti da je tvrdnja istinita. Na primjer, za $a = 8, b = 15, c = 4$ vrijedi: 8 je djeljiv s 4 i umnožak $8 \cdot 15 = 120$ je djeljiv s 4, ili za $a = 8, b = 15, c = 5$ vrijedi: 15 je djeljiv s 5 i umnožak $8 \cdot 15 = 120$ je djeljiv s 5. No, njezina istinitost se treba utvrditi (ili odbaciti) dokazom, o čemu će više riječi biti kasnije.

2.2.3. Obrat tvrdnje

Kada se u tvrdnji međusobno zamijene uloge pretpostavke *P* i zaključka *Q*, dobiva se iskaz koji se naziva obrat tvrdnje, simbolički $Q \Rightarrow P$. Obrat tvrdnje je nova tvrdnja koja može, ali i ne mora biti istinita, stoga se njezina istinitost treba ispitati te potvrditi ili odbaciti. Ako se pri ispitivanju istinitosti tvrdnje pronađe barem jedan primjer, koji pokazuje da tvrdnja ne vrijedi, onda se može zaključiti da tvrdnja općenito ne vrijedi. Primjer na temelju kojeg se tvrdnja odbacuje kao istinita naziva se *kontra-primjer* (Baranović, 2018). Na primjer, ako se u prethodnom primjeru (Tvrdnja 1) zamijene uloge od *P* i *Q*, nova tvrdnja glasi:

Tvrdnja 2 (Obrat Tvrdnje 1). *Ako je umnožak* $a \cdot b$ *dvaju prirodnih brojeva djeljiv prirodnim brojem c, onda je barem jedan od faktora tog umnoška djeljiv brojem c.*

Ovaj obrat nije istinit što se može vidjeti na kontra-primjeru umnoška 120, koji je djeljiv s 10. Jer, broj 120 se može dobiti na različite načine kao umnožak dvaju prirodnih brojeva pa ako se uzme $120 = 8 \cdot 15$ vidljivo je da niti jedan od faktora umnoška, ni broj 8 ni broj 15, nije djeljiv brojem 10. Međutim, za neke istinite tvrdnje i njihov obrat može biti istinit. Na primjer, neka je dana sljedeća tvrdnja:

Tvrdnja 3. *Ako je prirodan broj a djeljiv brojevima 3 i 4, onda je taj broj djeljiv i brojem 12.*

Ispitivanjem bi se brzo ustanovilo da tvrdnja vrijedi za bilo koji prirodan broj a sa zadanom pretpostavkom. Iako to još uvijek ne znači da je tvrdnja istinita za svaki prirodan broj a, jer ako se na jednom ili više primjera ustanovi da tvrdnja vrijedi, na temelju toga se ne može zaključiti da tvrdnja vrijedi općenito. Ipak, bez obzira na istinitost dane tvrdnje, može se razmatrati obrat tvrdnje. Kada se u Tvrdnji 3 zamjene uloge od P i Q, nova tvrdnja glasi:

Tvrdnja 4 (Obrat tvrdnje 3). *Ako je prirodan broj a djeljiv brojem 12, onda je taj broj djeljiv brojevima 3 i 4.*

Ispitivanjem bi se i u ovom slučaju ustanovilo da tvrdnja vrijedi za bilo koji prirodan broj a sa zadanom pretpostavkom. Ali, tek bi se dokazom moglo potvrditi da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj a koji ispunjava danu pretpostavku.

Kada se za neku tvrdnju, koja je istinita, pokaže da vrijedi i njezin obrat onda se kaže da tvrdnja „vrijedi u oba smjera". U tom slučaju, te dvije tvrdnje mogu se izreći u obliku ekvivalencije kao jedna tvrdnja, koristeći izraz „ako i samo ako" (skraćeno akko) ili „onda i samo onda", simbolički $P \Leftrightarrow Q$ (Baranović, 2018). Tako se prethodne dvije tvrdnje (Tvrdnja 3 i 4) mogu izreći u obliku ekvivalencije:

Tvrdnja 5 (Tvrdnja 3 i 4 zajedno). *Pridodan broj a djeljiv je brojevima 3 i 4 ako i samo ako je djeljiv brojem 12.*

Osim postavljanja tvrdnje u obliku ekvivalencije, korisna je vještina i rastavljanja tvrdnje iskazane u obliku ekvivalencije na dvije tvrdnje, iskazane u obliku implikacije. Razumijevanje i vještina formuliranja tvrdnji i obrata tvrdnji potrebna je kako bi se one mogle pravilno primijeniti, bilo pri rješavanju odgovarajućih zadataka, bilo pri izvođenju novih tvrdnji ili dokazivanju istinitosti postavljenih tvrdnji. Ne razlikovanje tvrdnje od njezinog obrata može dovesti do pogrešne primjene, ali i nemogućnosti rješavanja problema ili dokazivanja (Baranović, 2018).

2.2.4. Negacija tvrdnje

Pod negacijom tvrdnje T podrazumijeva se nova tvrdnja $\neg T$ koja je lažna ukoliko je polazna tvrdnja istinita i obratno, negacija tvrdnje je istina, ukoliko je polazna tvrdnja lažna.

Ukoliko je tvrdnja iskazana u obliku implikacije $P \Rightarrow Q$, može se razmatrati kako se mijenja istinitost tvrdnje pri negiranju nekog njezinog dijela ($\neg P$ ili $\neg Q$), ali od posebnog značaja je postavljanje negacije cijele tvrdnje $\neg(P \Rightarrow Q)$.

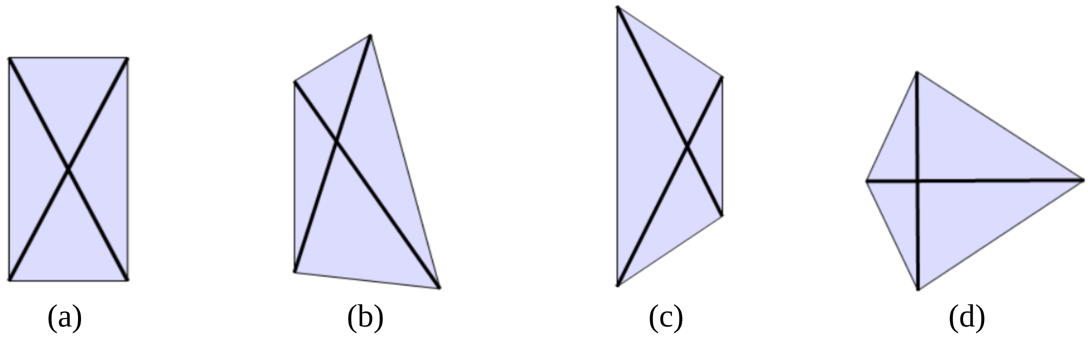
Negacija tvrdnje iskazane u obliku implikacije radi se prema formuli: $\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$. To znači da pri negiranju, iskaz u obliku implikacije „Ako …, onda …" prelazi u složeni iskaz u obliku konjunkcije koji veznikom „i" povezuje pretpostavku *P* i negirani zaključak $\neg Q$. Novi iskaz se može formulirati i u obliku: „Neka vrijedi *P*. Tada vrijedi $\neg Q$". Ili „Neka vrijedi *P*. Pretpostavimo suprotno: $\neg Q$" (Hammack, 2013). Na primjer, uzmimo sljedeću tvrdnju:

Tvrdnja 6. *Dijagonale pravokutnika su jednakih duljina,*

Tvrdnja 6 je istinita, a u standardnom obliku glasi: *Ako je četverokut pravokutnik, onda su njegove dijagonale jednakih duljina*. Negiranjem pojedinih dijelova tvrdnje mogu se razmatrati razne varijante novih tvrdnji (Baranović, 2018).

Tvrdnja 6a (Tvrdnja 6 u kojoj je negirana samo pretpostavka *P*). *Ako četverokut nije pravokutnik, onda su njegove dijagonale jednakih duljina*.

Tvrdnja postavljena na ovaj način potiče na ispitivanje postoji li još koja vrsta četverokuta koja ima dijagonale jednakih duljina. Takvih četverokuta ima beskonačno mnogo, npr. svi jednakokračni trapezi imaju dijagonale jednakih duljina (Slika 6c). Ipak, ima i onih četverokuta koji nisu pravokutnici i nemaju dijagonale jednakih duljina, npr. svi rombovi koji nisu kvadrati, pa ovako postavljen iskaz općenito ne vrijedi.



Slika 6. Pravokutnik, trapezoid, jednakokračni trapez, deltoid

Tvrdnja 6b (Tvrdnja 6 u kojoj je negiran samo zaključak Q). *Ako je četverokut pravokutnik, onda njegove dijagonale nisu jednakih duljina.*

Tvrdnja postavljena na ovaj način ne vrijedi jer ako nešto pod određenim uvjetima vrijedi, ne može pod istim uvjetima istodobno i ne vrijediti. Dakle, ne postoji pravokutnik, čije dijagonale nisu jednakih duljina, odnosno, svi pravokutnici imaju dijagonale jednakih duljina.

Tvrdnja 6c (Tvrdnja 6 koja zadržava oblik implikacije, ali se umjesto pretpostavke P i zaključka Q razmatraju njihove negacije). *Ako četverokut nije pravokutnik, onda njegove dijagonale nisu jednakih duljina.*

Ni ova tvrdnja nije istinita jer postoje četverokuti koji nisu pravokutnici, a ipak imaju dijagonale jednakih duljina (Slika 6b,c,d). Konačno, negacijom tvrdnje 6 kao implikacije po formuli $\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$ dobiva se sljedeća tvrdnja:

Tvrdnja 7 (Negacija tvrdnje 6). *Zadani četverokut je pravokutnik i njegove dijagonale nisu jednakih duljina* ili *Neka je dani četverokut pravokutnik. Tada njegove dijagonale nisu jednakih duljina.* ili *Postoji četverokut koji nije pravokutnik i čije dijagonale nisu jednakih duljina.*

S obzirom da i takvih četverokuta ima beskonačno mnogo, npr. svi deltoidi koji nisu kvadrati (Slika 6d), ova tvrdnja nije istinita. Odnosno, kako je tvrdnja 6 istinita, njezina negacija je lažna tvrdnja.

Ukoliko je zaključak Q složeni iskaz, npr. konjunkcija ili disjunkcija, onda se pri njegovom negiranju primjenjuje pravilo za negiranje tog složenog oblika. Na primjer, negacija konjunkcije prelazi u disjunkciju negacija sastavnih tvrdnji, a negacija disjunkcije prelazi u konjunkciju negacija sastavnih tvrdnji.

2.2.5. Kontrapozicija tvrdnje

Pod kontrapozicijom tvrdnje zadane u obliku implikacije $P \Rightarrow Q$ podrazumijeva se tvrdnja koja je postavljena tako da se negiraju i pretpostavka i tvrdnja, a zatim se postavi obrat tih negacija: $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Tvrdnja i kontrapozicija tvrdnje su ekvivalentne tvrdnje jer su uvijek istovremeno ili oboje istinite ili oboje neistinite. Postavljanje kontrapozicije zadane tvrdnje vrlo je važna i korisna vještina jer se neke tvrdnje pomoću nje mogu vrlo jednostavno dokazati, a neke se bez nje uopće ne mogu dokazati (Baranović, 2018).

Tablica 1. Tvrdnja, obrat, kontrapozicija i negacija

Tvrdnja	**Obrat**	**Kontrapozicija**	**Negacija**
$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$P \wedge \neg Q$
Ako je a prirodan broj, onda je on i cijeli broj.	*Ako je a cijeli broj, onda je on i prirodan broj.*	*Ako a nije cijeli broj, onda on nije ni prirodan.*	*Postoji prirodan broj a, koji nije cijeli broj.*
Istina	Nije istina	Istina	Nije istina

Poznavanje procesa postavljanja tvrdnji, njezinog obrata i negacije te kontrapozicije nužno je potrebno pri utvrđivanju istinitosti raznih izvedenih tvrdnji, a posebno složenijih tvrdnji kroz proces dokazivanja. Posljedično, stečena znanja i vještine potpomažu razvoj matematičkog mišljenja, koje se temelji upravo na opisanim načinima logičkog zaključivanja.

3. Matematički dokaz

Pod *dokazom* se, u većini matematičke literature, podrazumijeva konačan niz korektnih logičkih zaključivanja, koji se temelje na aksiomima, definicijama ili ranije dokazanim tvrdnjama i kojima se uz uvažavanje zadane pretpostavke (P) utvrđuje istinitost postavljenog zaključka (Q). Takva vrsta dokaza još se naziva i *formalnim dokazom*. U skladu s tim, *dokazati tvrdnju* znači pronaći konačan niz logičkih zaključaka kojima se nedvojbeno potvrđuje istinitost tvrdnje, a sam postupak otkivanja tog niza je *proces dokazivanja* (Baranović, 2018).

Dok se istinitost izvedene tvrdnje ne potvrdi dokazom, ona se ne prihvaća kao istinita. Ali, kad se jednom dokaže, ona postaje teorem i taj teorem je dokazan zauvijek. Iz tog razloga se formalni matematički dokaz smatra apsolutnim (Stefanowicz, Kyle i Grove, 2014).

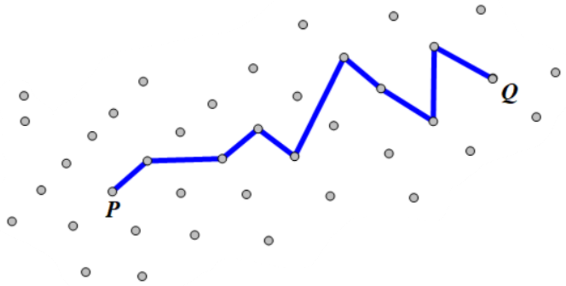
Međutim, ne postoji idealan dokaz jer se tvrdnja obično može dokazivati na različite načine, korištenjem različitih metoda i strategija te kombiniranjem različitih aksioma, definicija i teorema. Zato nijedan dokaz nije niti bolji niti gori od drugoga sve dok je valjan. Onaj tko nema iskustva u dokazivanju, ne može odmah na početku znati koju će metodu koristiti. Ponekad će odabrati pogrešan put, ponekad neće znati pronaći izlaz do kraja puta, ali nakon određene vježbe i stečenog znanja moći će uspješnije birati odgovarajuću metodu primjerenu kontekstu u kojemu se tvrdnja dokazuje (Stefanowicz, Kyle i Grove, 2014).

Proces dokazivanja općenito može biti direktan ili indirektan pa se govori o direktnom ili indirektnom dokazu. Na kraju procesa dokazivanja obično se stavlja znak ■, kojim se potvrđuje kraj dokaza (Baranović, 2018).

3.1. Direktni dokazi

Direktno (izravno) dokazati istinitost neke tvrdnje ($P \Rightarrow Q$) znači postaviti konačan niz logičkih zaključivanja koji počinje od pretpostavke *P*, nastavlja se povezivanjem odgovarajućih aksioma, definicija ili ranije dokazanih tvrdnji te završava zaključkom Q (Slika 7; Baranović, 2018).

Prema svojstvu operacije implikacije ($P \Rightarrow Q$), ako je pretpostavka *P* istinita, implikacija će biti istinita samo kada je i zaključak Q istinit. To znači da, ako se krene od istinitosti pretpostavke P te nizom korektnog zaključivanja izvede istinitost zaključka Q, onda će promatrana tvrdnja kao implikacija ($P \Rightarrow Q$) biti istinita (Hammack, 2013). Radi ilustracije procesa direktnog dokazivanja daju se primjeri dviju tvrdnji.



Slika 7. Direktan dokaz

Tvrdnja 8. *Kvadrat svakog parnog broja je paran broj.*

Prije dokazivanja, tvrdnja se može preformulirati u standardni oblik kako bi se jasno uočilo što je pretpostavka (*P*), a što zaključak (*Q*): *Za svaki prirodan broj a vrijedi: Ako je* a *paran broj, onda je i* a^2 *paran broj.*

Dokaz: (*P*) Neka je a paran broj. Tada se on može zapisati u obliku $a = 2k, k \in \mathbb{N}$. Njegovim kvadriranjem dobiva se: $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2m, m \in \mathbb{N}$. Dakle, kvadrat broja *a* je oblika: $a^2 = 2m,\ m \in \mathbb{N}$, što znači da je kvadrat broja *a* paran broj (Q)**.** ■

U ovom primjeru se prvo koristila definicija parnog broja, a potom pravilo kvadriranja umnoška. Zatim je, nakon rastavljanja složenog broja na proste faktore, primijenjeno svojstvo asocijativnosti množenja. Iz tako dobivenog oblika broja izveden je zaključak da se radi o parnom broju (Baranović, 2018).

Tvrdnja 9. *Zbroj triju uzastopnih prirodnih brojeva je uvijek djeljiv s 3.*

Tvrdnja iskazana u standardnom obliku glasi: *Ako su tri prirodna broja uzastopna, onda je njihov zbroj djeljiv s 3.*

Kako bi se razvijale različite strategije dokazivanja i steklo iskustvo biranja optimalnog i efikasnog načina, korisno je istu tvrdnju dokazivati na različite načine, kada je to moguće, te ih međusobno uspoređivati. U ovom slučaju, ukoliko je *n* proizvoljan prirodan broj, onda se tri uzastopna prirodna broja mogu zapisati na više načina, npr.: $n, n+1, n+2$ ili $n-1, n, n+1$ ili

$n-2, n-1, n$. U skladu s odabirom zapisa uzastopnih brojeva mogu se provesti dokazi te ih međusobno usporediti.

Dokaz 1: (P) Neka su dana tri uzastopna prirodna broja: $n, n+1, n+2$. Njihovim zbrajanjem dobiva se: $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)=3m, m\in\mathbb{N}$. To znači da je njihov zbroj višekratnik broja 3, a višekratnik broja 3 je uvijek djeljiv s 3. Prema tome, zbroj polaznih uzastopnih brojeva djeljiv je s 3 (Q). ■

Dokaz 2: (P) Neka su dana tri uzastopna prirodna broja: $n-1, n, n+1$. Njihovim zbrajanjem dobiva se: $(n-1)+n+(n+1)=3n, n\in\mathbb{N}$. Zbroj je višekratnik broja 3, pa je djeljiv sa 3. Prema tome, zbroj polaznih uzastopnih brojeva djeljiv je s 3 (Q). ■

Dokaz 3: (P) Neka su dana tri uzastopna prirodna broja: $n-2, n-1, n$. Njihovim zbrajanjem dobiva se: $(n-2)+(n-1)+n=3n-3=3(n-1)=3m, m\in\mathbb{N}_0$. Dakle, njihov zbroj je višekratnik broja 3 pa je djeljiv sa 3. Prema tome, zbroj polaznih uzastopnih brojeva djeljiv je s 3 (Q). ■

U sva tri slučaja koristila se definicija uzastopnih brojeva i njihov algebarski zapis, a nakon izvršenog zbrajanja, na temelju definicije višekratnika broja 3 izveden je zaključak o djeljivosti zbroja s brojem 3. U prvom i trećem slučaju (Dokaz 1 i 3) koristilo se još svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju (izlučivanje zajedničkog faktora), dok u drugom slučaju (Dokaz 2) to nije bilo potrebno. Stoga se može reći da je u dokazivanju Tvrdnje 9 drugi zapis uzastopnih prirodnih brojeva najefikasniji.

3.2. Indirektni dokazi

Indirektno (neizravno) dokazati istinitost neke tvrdnje ($P\Rightarrow Q$) znači dokazati da je negacija te tvrdnje $\neg(P\Rightarrow Q)$ neistina pa će u tom slučaju, prema svojstvu operacije negacije, polazna tvrdnja biti istina.

Kako je već prije pokazano, negacija implikacije ekvivalentna je konjunkciji polazne pretpostavke i suprotnog zaključka: $\neg(P\Rightarrow Q)=P\wedge\neg Q$, što znači da proces indirektnog dokazivanja započinje od istinitosti dviju pretpostavki P i $\neg Q$. Ako se dalje, nizom korektnih logičkih zaključivanja izvede istinitost i neke tvrdnje (T) i njezine negacije ($\neg T$), onda je proces dokazivanja doveden u nemoguću situaciju, odnosno kaže se da je sveden na *kontradikciju* (lat. *reductio ad absurdum*, svođenje na besmisao). U tom slučaju, negacija tvrdnje se mora odbaciti kao neistina, što dalje povlači da je polazna tvrdnja istina (Hammack, 2013). Dokaz ostvaren na takav način naziva se *dokaz kontradikcijom*.

Ako se u procesu indirektnog dokazivanja izvede istinitost negacije polazne pretpostavke ($\neg P$), opet se dolazi do kontradikcije jer ne može istovremeno vrijediti pretpostavka P i njezina negacija $\neg P$, ali u tom slučaju se potvrđuje da je i kontrapozicija $\neg Q \Rightarrow \neg P$ istinita. Kako je kontrapozicija logički ekvivalentna polaznoj tvrdnji $P \Rightarrow Q$, može se zaključiti da je polazna tvrdnja istinita. Dokaz ostvaren na takav način naziva se *dokaz po kontrapoziciji*, a on je zapravo poseban slučaj dokaza kontradikcijom (Stefanowicz, Kyle i Grove, 2014).

Jedan od najčešće spominjanih dokaza kontradikcijom je Euklidov dokaz tvrdnje o prostim brojevima.

Tvrdnja 10. *Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. prostih brojeva ima konačno mnogo. To znači da postoji najveći prosti broj, npr. p. Svi prosti brojevi tada su: $2,3,5,7,11,...,p$. Sada se može izgraditi broj q tako da se pomnože svi ti prosti brojevi i umnošku se doda broj 1: $q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p + 1$. Tako dobiveni broj q je sigurno veći od broja p pa on nije prost jer je p najveći prosti broj. Ako q nije prost broj, onda je on složen. To znači da ima više od dva, barem tri djelitelja, odnosno djeljiv je s 1, samim sobom i još nekim prostim brojem. No, on pri dijeljenju sa svakim od prostih brojeva $2,3,5,7,11,...,p$ ima ostatak 1 pa nema nijedan prosti broj kojim je on djeljiv. To znači da broj q nije složen. Time smo istovremeno došli do tvrdnje da je q i složen i nije složen broj, što je kontradikcija. To nadalje znači da polazna pretpostavka da *prostih brojeva ima konačno mnogo* nije istinita te je istinita tvrdnja da *prostih brojeva ima beskonačno mnogo* ■

Ukoliko se pokaže da bi pri indirektnom dokazivanju dokaz po kontrapoziciji bio efikasan, onda se najprije može postaviti kontrapozicija zadane tvrdnje, a zatim se ona dokazuje direktno. Pogledajmo to na primjeru sljedeće tvrdnje.

Tvrdnja 11. *Ako je kvadrat prirodnog broja paran broj, onda je i sam broj paran.*

Kontrapozicija tvrdnje 11 ($\neg Q \Rightarrow \neg P$): *Ako je prirodan broj neparan, onda je i njegov kvadrat neparan broj.*

Dokaz kontrapozicije: ($\neg$Q) Neka je a neparan prirodan broj. Tada se broj a može zapisati u obliku $a = 2k-1, k \in \mathbb{N}$. Kvadriranjem binoma te izlučivanjem zajedničkog faktora dobiva se: $a^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1 = 2n+1, n \in \mathbb{N}_0$. To znači da je kvadrat broja a oblika $a^2 = 2n+1, n \in \mathbb{N}_0$, tj. on je neparan broj. Dakle, kontrapozicija je istinita tvrdnja.

Zaključak: kako je kontrapozicija **(**$\neg Q \Rightarrow \neg P$) istinita, zbog logičke ekvivalentnosti istinita je i polazna tvrdnja ($P \Rightarrow Q$), tj. polazna tvrdnja vrijedi po kontrapoziciji. ■

Indirektan dokaz obično se koristi kada je vidljivo da se tvrdnja ne može dokazati direktno ili se nasluti da bi indirektan put bio efikasniji. No, dokazivanje tvrdnji indirektnim procesom smatra se najsloženijim oblikom dokazivanja pa je za njegovo provođenje korisno prvo steći iskustvo direktnog dokazivanja i vještinu postavljanja kontrapozicija.

4. Smisao dokaza u matematici

Kako je već istaknuto, za svaku izvedenu tvrdnju potrebno je dokazati istinitost jer se bez toga ona ne prihvaća kao istinita. Međutim nije uvijek bilo tako. Naime, u vremenskom razdoblju prije Euklida matematička su se znanja razvijala proučavanjem pojedinačnih slučajeva te izvođenjem zaključaka na temelju njih. Tako su stari Egipćani, rješavajući svakodnevne problemske situacije s kojima su se suočavali, vršili razna mjerenja, crtanja, prebrojavanja te na temelju tih rezultata i svog vlastitog iskustva uočavali pravilnosti te izvodili potrebne zaključke. Na taj način se do mnogih otkrića dolazilo sasvim slučajno i neočekivano. Moguće je da su matematičari toga doba provjeravali valjanost rezultata i kako se do njih došlo, ali vjerojatno nisu smatrali bitnim to i zapisati (Hemmi i Löfwall, 2009).

Sistematiziranjem znanja aksiomatskom metodom te izgradnjom deduktivnog sustava znanja aksiomatskom metodom, od Euklida pa sve do danas, važnost matematičkog znanja iz domene praktičnosti i rješavanja problema preusmjerena je na domenu ispitivanja istinitosti, osnovanosti, logike i izvođenja dokaza (Hemmi i Löfwall, 2009).

Proces u kojemu se polazi od pojedinačnih ili posebnih slučajeva, na temelju kojih se stvaraju slutnje, a zatim se postavlja opći zaključak, koji vrijedi za sve slučajeve, i one nepoznate i neistražene, naziva se *induktivnim zaključivanjem*. Za induktivno zaključivanje još se kraće kaže da je prijelaz u zaključivanju „od posebnoga prema općem" ili metoda nepotpune indukcije. No, induktivno zaključivanje može dovesti i do pogrešnih zaključaka pa se tvrdnje izvedene induktivnim zaključivanjem ne mogu uzeti kao istinite dok se njihova istinitost ne utvrdi dokazom.

S druge strane, zaključak izveden deduktivno ima čvrstinu dokaza, odnosno tvrdnja izvedena deduktivnim zaključivanjem može se uzeti kao pouzdana te dalje primjenjivati.

Primjer 1. Odrediti kakvi su brojevi oblika $n^2 - n + 11$, gdje je *n* prirodan broj, a zatim postaviti tvrdnju.

Ako bi zaključak izvodili induktivno, značilo bi odrediti vrijednosti danog izraza za prvih nekoliko prirodnih brojeva, a zatim na temelju dobivenih vrijednosti izvesti zaključak. Dakle, za prirodne brojeve n = 1, 2, 3, 4 i 5 dobivaju se redom vrijednosti 11, 13, 17, 23 i 31. Na temelju dobivenih vrijednosti može se uočiti su svi dobiveni brojevi prosti brojevi pa u skladu s uočenim postaviti opći zaključak: *Brojevi oblika $n^2 - n + 11$, gdje je n prirodan broj, su prosti brojevi.* Međutim, ako bi se proces određivanja vrijednosti izraza još malo nastavio, vrlo brzo bi se ustanovilo da je za $n=11$ vrijednost izraza $121-11+11=121$, a broj 121 nije prost već složen broj ($121=11\cdot 11$). To znači da postavljena tvrdnja nije istinita jer je n = 11 kontra primjer koji pobija istinitost postavljenog zaključka.

Ako bi zaključak izvodili deduktivno, onda bi trebalo razmatrati opće slučajeve kada je prirodan broj *n* paran broj i kada je neparan broj. Ukoliko je *n* paran broj, onda je on oblika $n=2k, k\in\mathbb{N}$ pa za dani izraz vrijedi:

$$n^2-n+11=(2k)^2-2k+11=4k^2-2k+10+1=2\left(2k^2-k+5\right)+1=2t+1, t\in\mathbb{N}.$$

Ukoliko je *n* neparan broj, onda je on oblika $n=2k-1, k\in\mathbb{N}$ pa za dani izraz vrijedi:

$$n^2-n+11=(2k-1)^2-(2k-1)+11=4k^2-6k+12+1=2\left(2k^2-3k+6\right)+1=2t+1, t\in\mathbb{N}.$$

Kako se u oba slučaja dobiva da je izraz neparan broj može se izvesti zaključak: *Brojevi oblika* n^2-n+11*, gdje je n prirodan broj, su neparni brojevi.*

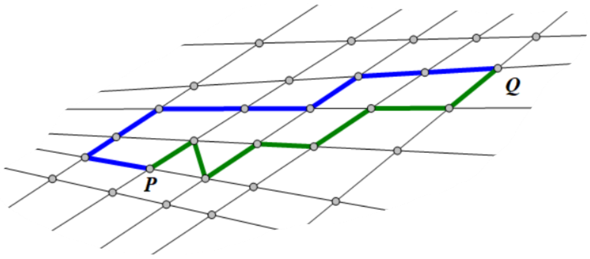
Ovaj primjer ilustrira kako se induktivnim zaključivanjem izvela tvrdnja koja nije istinita, dok se deduktivnim zaključivanjem postavila istinita tvrdnja. S obzirom da zaključak donesen deduktivno ima čvrstinu dokaza, tvrdnja postavljena na takav način može se dalje primjenjivati, bilo u procesu dokazivanja istinitosti nekih drugih izvedenih tvrdnji, bilo u rješavanju odgovarajućih problema.

Primjer 2. Neka je istinitost tvrdnje: *Zbroj veličina svih unutrašnjih kutova trokuta iznosi 180°* izvedena deduktivnim zaključivanjem. Ova tvrdnja se dalje može koristiti u konkretnim primjerima pri određivanju konkretnih vrijednosti. Na primjer, ako su poznate veličine dvaju kutova trokuta, primjenom ove tvrdnje može se odrediti veličina trećega kut promatranog trokuta.

Za proces zaključivanja u kojemu se polazi od općih zaključaka i tvrdnji te na temelju njih izvodi zaključak o pojedinačnim slučajevima kraće se kaže da je prijelaz u zaključivanju „od općega prema posebnom“, što je karakteristično za tvrdnje izvedene deduktivnim zaključivanjem.

Ukratko, tvrdnje koje su izvedene deduktivnim zaključivanjem mogu se uzeti kao pouzdane i sigurne te primijeniti u konkretnim zadatcima, dok tvrdnje postavljene induktivnim zaključivanjem, prije same primjene na druge slučajeve, trebaju biti podvrgnute postupku dokazivanja istinitosti. No, iako nepotpuna indukcija nije savršena metoda, ona je važan oblik zaključivanja kojim se razvija vještina otkrivanja i postavljanja općih zakonitosti te se ne bi smjela odbaciti, posebno ne u matematičkom obrazovanju.

Ipak, utvrđivanje istinitosti izvedenih tvrdnji nije jedini smisao dokaza. Dokaz ima višestruku važnost, kako u matematici i matematičkom obrazovanju tako i u životu i djelovanju svakoga čovjeka. Naime, dugo vremena, nakon uspostavljanja deduktivnog sustava i uočavanja važnosti dokazivanja istinitosti svake izvedene tvrdnje, provjera odnosno utvrđivanje istinitosti matematičke tvrdnje bila je jedina uloga dokaza. No, s vremenom se pokazalo da su dokazi zapravo glavni nositelji matematičkog znanja, a teoremi su, kaže Rehuda Rav u svome članku objavljenom u *Philosophae Mathematicae* (1999), samo „etikete, naljepnice na dokazu" te dodaje da su dokazi kao mreže cesta u sustavu javnog prijevoza, a tvrdnje teorema kao autobusne stanice (Slika 8), mjesto prikladnog zaustavljanja (De Viliers, 2021).



Slika 8. Dokaz kao funkcionalna mreža znanja

Naime, kada se neka tvrdnja i ne uspijeva dokazati, u pokušajima dokazivanja te raznim dodatnim istraživanjem stvaraju se nova matematička znanja pa čak i cijelo novo područje, kao što je na primjer stvaranje ne-euklidske geometrije u pokušaju opovrgavanja petog Euklidova postulata. Zatim, kroz proces dokazivanja stječe se uvid ne samo da nešto jest istina već i zašto je istina, a dokazivanje tvrdnje na različite načine omogućava povezivanje različitih znanja u funkcionalnu mrežu znanja, koja osigurava i bolje razumijevanje matematičkih koncepata (de Villiers, 2021). Nadalje, kroz proces dokazivanja razvijaju se razne metode i strategije koje se mogu primijeniti i pri rješavanju raznih vrsta problema (Hemmi i Löfwall, 2009).

Tvrdnja 12. $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\ 1+2+3+...+n=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$.

Dokaz ove tvrdnje najčešće se provodi primjenom matematičke indukcije. No, ova tvrdnja poznata je pod nazivom *Gaussova*[3] *dosjetka*, jer je prema jednoj anegdoti, njemački matematičar Gauss do promatrane formule došao još kao dijete zbrajanjem prvih 100 prirodnih brojeva, za što je još dobio i kaznu od učitelja jer je brzo i točno riješio zadatak. Poopćavanjem

[3] Johann Carl Friedrich Gauss, 1777. – 1855., njemački matematičar koji je dao značajan doprinos mnogim područjima: teoriji brojeva, algebri, analizi, diferencijalnoj geometriji, statistici, geodeziji, geofizici, mehanici, astronomiji, optici i dr.

Gaussova razmišljanja pri zbrajanju prvih 100 brojeva izvodi se zadana formula, a njegov proces zbrajanja može se koristiti kao proces dokazivanja.

Dokaz 1 (Matematičkom indukcijom). U prvom koraku (baza indukcije) provjerava se vrijedi li formula za prvi prirodan broj, tj. za $n=1$. Kako je $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, lijeva i desna strana su jednake pa formula vrijedi za $n=1$. Također, formula vrijedi i za $n=2$ jer je $1+2=\frac{2\cdot 3}{2}$.

U sljedećem koraku (korak indukcije), na temelju pretpostavke da formula vrijedi za neki prirodni broj $n=k$, provjerava se vrijedi li i za sljedeći broj, $n=k+1$. Ako se pretpostavi da dana formula vrijedi za broj $n=k$, onda se može pisati: $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

Primjenom osnovnih znanja o algebarskim izrazima, određuje se vrijednost zbroja prvih $k+1$ brojeva:

$$
\begin{aligned}
&1+2+3+...+k+(k+1)=\{\textit{na zbroj prvih n brojeva primijeni se pretpostavka}\} = \\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\{\textit{sve se svede na zajednički nazivnik}\}= \\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\{\textit{primijeni se svojstvo distributivnosti}\}= \\
&=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Dobiveni izraz odgovara formuli u koju se umjesto k uvrsti broj $k+1$, a to znači da formula vrijedi i za $n=k+1$. Konačno, na temelju baze (formula vrijedi za $n=1,2$) i koraka indukcije (uz pretpostavku da formula vrijedi za $n=k$, pokazalo se da vrijedi i za $n=k+1$, zaključuje se da formula vrijedi za svaki prirodan broj n. ■

Primjenom aksioma matematičke indukcije utvrđena je valjanost formule, ali sam postupak ne govori ništa o tome kako se do formule dolazi i zašto to vrijedi, što je moguće vidjeti primjenom Gaussova postupka zbrajanja.

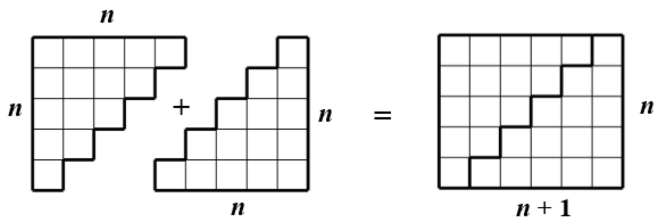
Dokaz 2 (Gaussova metoda). Neka je S_n zbroj prvih n prirodnih brojeva: $S_n=1+2+3+...+n$, odnosno $S_n=n+(n-1)+(n-2)+...+2+1$ (zbroj tih brojeva zapisan unatrag, od najvećeg broja). Zbrajanjem tih dviju suma dobiva se:

$2S_n = (n+1)+(n+1)+...+(n+1)$, pri čemu se pribrojnik $(n+1)$ zbraja n puta. Zato se može pisati $2S_n = n\cdot(n+1)$. Dijeljenjem izraza s 2, dobiva se: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. ■

Na taj je način, prema anegdoti, Gauss izračunao: $1+2+3+...+100 = \frac{100\cdot 101}{2} = 5050$.

U procesu dokazivanja mogu se koristiti i elementi vizualizacije. Na primjer, prirodni brojevi se mogu prikazivati diskretnim objektima (točke, krugovi, kvadrati itd.), a zatim međusobno grupirati kako bi se prikazala odgovarajuća ideja. Ukoliko se za utvrđivanje istinitosti neke tvrdnje koriste samo vizualni prikazi (razni shematski i grafički prikazi i dr.), bez dodatnih objašnjenja, onda se dokaz predstavljen na taj način naziva *vizualnim dokazom* ili *dokazom bez riječi* (Nelson, 1993).

Dokaz 3 (Vizualni dokaz).



Slika 9. Zbrajanje prvih n uzastopnih prirodnih brojeva

Unutar matematičke zajednice još se uvijek vodi rasprava o tome je li vizualni prikaz (npr. Slika 9) samo pomoćno sredstvo u otkrivanju glavne ideje dokaza, dio dokaza ili je sam za sebe dokaz, budući da u predstavljanju neke tvrdnje vizualnim prikazom, čitatelj sam treba otkriti formalni niz logičkih zaključaka.

Pored svega navedenog, sam proces dokazivanja je važan jer se ostvaruje prosuđivanjem, argumentiranjem i logičkim zaključivanjem, a to su vještine koje čovjeku trebaju u svakodnevnom životu i radu. Naime, razvijanjem sposobnosti pravilnog zaključivanja i argumentiranja u procesu dokazivanja, korištenjem različitih strategija i metoda, stječu se vještine i navike koje se mogu primijeniti pri suočavanju s problemskim situacijama u raznim životnim okolnostima u školi, na poslu i šire. Tako, čovjek svakodnevno postavlja razne tvrdnje i provjerava njihovu valjanost, uspoređuje različite tvrdnje te odabire one koje su istinite i korisne, također, provjerava valjanost nečijeg mišljenja te ga u skladu s tim prihvaća ili opovrgava itd. Stoga je potrebno učiti dokazivati jer to znači i učiti rasuđivati (Kurniku, 2001).

Slično tome, Hemmi i Löfwall (2009), u svome radu ističu da se dokaz svakako treba uključiti u nastavu matematike jer je on „duša i okosnica matematike“, a kroz dokazivanje se upoznaje važnost bavljenja matematikom te ukoliko se dokazi u nastavi matematike izostave, učenici mogu steći pogrešnu predodžbu o samoj prirodi matematike.

Međutim, dokazivanje u nastavi matematike nema istu ulogu kao i u stvaranju matematike, prije svega jer se u nastavi matematike najčešće koriste tvrdnje čija je istinitost već dokazana. Upravo zbog toga, mnogi učenici ne shvaćaju potrebu za dokazivanjem te smatraju besmislenim dokazivati nešto što je već dokazano (de Villiers, 2021). Stoga se sljedeće poglavlje detaljnije bavi razmatranjem smisla dokaza u nastavi matematike.

5. Smisao dokaza u nastavi matematike

U nastavi matematike, slično kao i u matematici, dominira stav da je glavna uloga dokaza utvrđivanje istinitosti izvedenih tvrdnji, a što je vidljivo i kroz način oblikovanja udžbenika i drugih nastavnih materijala. U posljednjih nekoliko desetljeća taj se uski pogled na smisao dokaza mijenja zahvaljujući raznim istraživanjima u obrazovanju i zalaganjima nekih autora koji ukazuju na različite pedagoške vrijednosti dokaza (de Villiers, 2021).

Zapravo smisao dokaza se mijenja ovisno o tome kako se odgovarajući problem postavlja pred učenika. I u nastavi matematike dokaz se, neizostavno, može koristiti za provjeru istinitosti tvrdnje, ali bi bilo poželjno da se u tom slučaju biraju tvrdnje koje učenicima nisu poznate. Također, kada se od učenika traži da uvjere drugog učenika ili učitelja u istinitost tvrdnje, važno je koristiti tvrdnje koje nisu očite na prvu.

U nekim situacijama korisno je od učenika tražiti, ne samo provjeru ili uvjerenje u istinitost izvedene tvrdnje, već i da objasne zašto neka tvrdnja vrijedi, a ako je moguće da prikažu različita objašnjenja i na taj način otkrivaju različite strategije dokazivanja. Također, umjesto da se nižu razne slične tvrdnje korisno je razmatranu tvrdnju dodatno istražiti variranjem iskaza te izvoditi generalizacije. Dokaz ponekad može služiti i kao način komunikacije među učenicima ili između učenika i učitelja, koja s jedne strane služi učenicima za razvoj formalnog matematičkog jezika, a s druge strane služi učiteljima za uvid u razine znanja i mišljenja učenika. Nadalje, kroz dokaze se mogu otkrivati i neke nove tvrdnje, ali i povezati te sistematizirati različite tvrdnje koje su vezane za određeni koncept itd. (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010; de Villiers, 2021). Proces dokazivanja sličan je procesu rješavanja problema pa se ti procesi mogu međusobno potpomagati, što znači da učenje procesa dokazivanja zasigurno razvija i strategije rješavanja problema (Hemmi i Löfwall, 2009).

Navedene uloge dokaza u nastavi matematike najčešće su isprepletene, ali u određenim situacijama obično neka od uloga dominira, dok druge uloge padaju u drugi plan (de Villiers, 2021). U nastavku se razmatraju pojedine uloge dokaza odvojeno iako kroz njihov opis može biti vidljiva i neka druga uloga ili barem kao mogućnost korištenja u neku drugu svrhu, što zasigurno ovisi i o znanju i iskustvu svakog čitatelja.

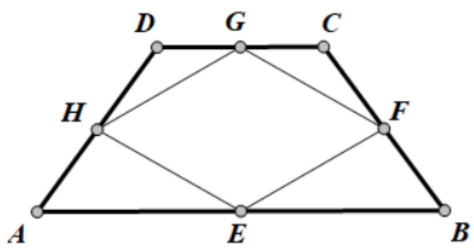
5.1. Dokaz kao provjera ili uvjerenje u istinitost tvrdnje

Neosporno je da se valjanost naslućivanja i istinitost izvedenih tvrdnji provjerava dokazom, ali postavlja se pitanje u kojoj mjeri izvedeni dokaz osigurava pojedincu uvjerenje u istinitost razmatrane tvrdnje. Tako Herbst, Miyakawa, i Chazan (2010) razmatraju kako formalni dokaz može utjecati na uvjerenje pojedinca o istinitosti dokazane tvrdnje, dok de Villiers (2021) smatra da dokaz nije nužno preduvjet za uvjerenje, već je uvjerenje češće preduvjet za pronalaženje dokaza (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010; de Villiers, 2021). Naime, matematičari ponekad provode mjesece pa čak i godine pokušavajući dokazati neku tvrdnju upravo jer su prethodno bili uvjereni u njezinu istinitost te se visoka razina uvjerenja ponekad može postići čak i u odsutnosti dokaza.

Slično je i u nastavi matematike. Od učenika se može tražiti da provjere istinitost određene tvrdnje postupkom dokazivanja, pri čemu cilj učitelja može biti da provjeri znanje učenika, ali i da se učenici sami uvjere u istinitost tvrdnje. Nastavna praksa pokazuje da puka provjera istinitosti izvedenih tvrdnji nije uvijek motivirajuća, posebno kada su tvrdnje učenicima već poznate, ali njihova znatiželja se može izazvati pitanjima zašto oni misle da je određena tvrdnja istinita ili kada ih se stavi u poziciju da svojim argumentima uvjere drugog učenika ili pak učitelja u istinitost tvrdnje. Pri tome je važno birati tvrdnje koje učenicima nisu očite ili poznate, već donekle izazovne kako bi se učenici upustili u proces dokazivanja u svrhu uvjeravanja, bilo sebe, bilo drugih u istinitost naslućivanja.

Nije uvijek jednostavno osigurati okruženje u kojemu se nameće potreba za provođenjem dokaza u svrhu uvjeravanja, posebno kada se uvjerenje stekne na temelju nekoliko primjera ili na temelju nekih ranijih iskustava (Rocha, 2019).

Primjer 3. (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010, str. 11). Provjeriti da je četverokut određen polovištima stranica jednakokračnog trapeza romb (Slika 10).



Slika 10. Četverokut određen polovištima stranica trapeza

Pri rješavanju ovog problema može se zamisliti sljedeća nastavna situacija: učitelj zadaje svim učenicima da utvrde istinitost gore navedene tvrdnje te da svoj zaključak argumentiraju deduktivnim zaključivanjem. Tada se jedan učenik prisjeti dvaju argumenata koji su se koristili prije toga: (1) četverokut dobiven spajanjem polovišta stranica jednakokračnog trapeza ima sukladne susjedne stranice i (2) četverokut dobiven spajanjem polovišta stranica bilo kojeg četverokuta uvijek je paralelogram. Koristeći ta dva argumenta, učenik izvede sljedeći zaključak: četverokut dobiven spajanjem polovišta stranica jednakokračnog trapeza je paralelogram, kojemu su i susjedne stranice sukladne pa to mora biti romb jer su i nasuprotne stranice paralelograma sukladne. Međutim, učitelj može uskrati tom učeniku da koristi prve dvije tvrdnje te tražiti od njega da i njih argumentira (dokaže). U tom slučaju, učenik je potaknut na traženje potpunog dokaza kako bi uvjerio učitelja u istinitost tvrdnje, iako je već bio uvjeren u svoj argument (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010).

5.2. Dokaz kao sredstvo objašnjenja istinitosti tvrdnje

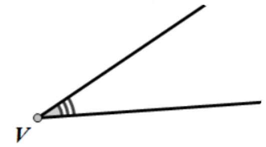
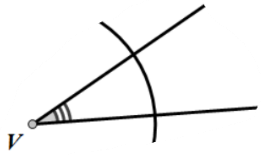
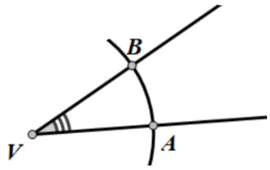
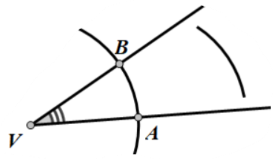
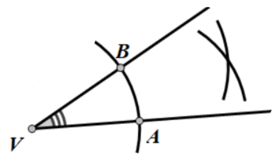
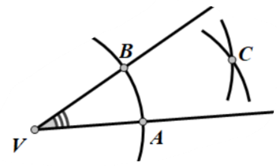
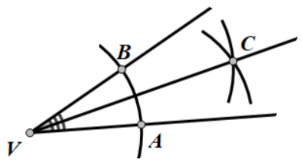
Razni faktori mogu utjecati na postizanje visoke razine uvjerenja o valjanosti naslućivanja ili o istinitosti postavljene tvrdnje, no to nužno ne znači razumijevanje zašto je naslućivanje ili postavljena tvrdnja istinita. Upravo potreba za razumijevanjem razloga istinitosti ostvarene slutnje ili postavljene tvrdnje motivira na traženje obrazloženja kroz proces dokazivanja. Drugim riječima, od dokaza se očekuje da osigura uvid i ravjetljenje zašto je određena slutnja ili izvedena tvrdnja istinita te objasni na koji način su pojmovi međusobno povezani, a krajnji ishod bi trebao biti bolje razumijevanje korištenih ideja i koncepata (De Villers, 2021).

Upravo iz tog razloga, nastava matematike se ne bi smjela svesti na puko učenje definicija, aksioma i teorema te njihovu primjenu u rješavanju odgovarajućih zadataka već bi se učenicima trebala osigurati mogućnost razumijevanja i izgradnje funkcionalne mreže znanja kroz proces dokazivanja (Hemmi i Löfwall, 2009).

No, nije svako objašnjenje ujedno i dokaz niti svako objašnjenje nužno mora voditi razumijevanju. Jer, moguće je da učenici kroz dano objašnjenje ipak ne steknu uvid u povezanost predstavljene ideje i korištenih koncepata pa razumijevanje može izostati. S druge strane, određeno razumijevanje koje učenici steknu ne mora nužno proizlaziti iz objašnjenja, a moguće je da i dano objašnjenje na temelju kojeg su stekli razumijevanje nema snagu dokaza. Stoga je na učiteljima odgovornost i izazov da učenicima osiguraju razumijevanje matematičkih koncepata i ideja kroz objašnjenja koja poštuju načelo znanstvenosti, odnosno izgradnju valjanih argumenata o istinitosti određene slutnje ili izvedene tvrdnje kroz deduktivan oblik zaključivanja (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010).

Primjer 4. (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010, str. 13). Konstruirati simetralu zadanog kuta, a zatim obrazložiti valjanost konstrukcije.

Prema definiciji, *simetrala kuta* je polupravac kojemu je početna točka vrh kuta i koji dijeli kut na dva sukladna dijela, a pod *geometrijskom konstrukcijom* (kraće *konstrukcijom*) podrazumijeva se izgradnja geometrijske figure korištenjem samo jednog ravnala (bez mjerne skale) i šestara. Konstrukcija simetrale kuta spada pod elementarnu konstrukciju koja se može svesti na konačan niz osnovnih konstrukcija: konstrukciju kružnice kojoj je poznato središte i radijus, konstrukciju točke kao presjek dviju kružnica ili (polu)pravac i kružnice te konstrukciju pravca kojemu su poznate njegove dvije točke. U nastavi matematike, konstrukcija simetrale kuta obično se uči kroz niz koraka (Slika 11) .

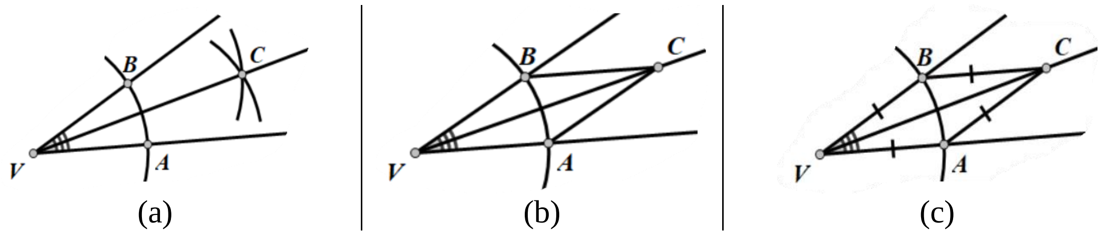
	Koraci konstrukcije simetrale kuta
	Korak 1. Konstruira se kružnica (kružni luk) proizvoljnog radijusa, čije središte je vrh kuta *V*.
	Korak 2. Kružni luk iz Koraka 1. siječe krakove kuta u točkama *A* i *B*.
	Korak 3. Konstruira se kružnica (kružni luk unutar kuta) jednakog radijusa kao prva kružnica (Korak 1), čije središte je točka *A*.
	Korak 4. Konstruira se kružnica (kružni luk unutar kuta) jednakog radijusa kao prva kružnica (Korak 1), čije središte je točka *B*.
	Korak 5. Kružnice iz Koraka 3 i 4. sijeku se unutar kuta u točki *C*.
	Korak 6. Polupravac *VC* je simetrala zadanog kuta.

Slika 11. Koraci konstrukcije simetrale kuta

No, nakon konstruiranja polupravca na opisani način važno je objasniti zašto je polupravac dobiven na taj način simetrala kuta, odnosno trebalo bi objasniti zašto tako dobiveni pravac zaista dijeli kut na dva sukladna dijela. To je zapravo motiv da se provede dokaz koji će osigurati potreban uvid i razumijevanje.

Proces dokazivanja temelji se na povezivanju koraka konstrukcije s odgovarajućim matematičkim svojstvima, na temelju kojih se može izvesti logički zaključak o sukladnosti dobivenih kutova.

Dokaz. (P) Neka je zadanom kutu konstruirana simetrala VC na opisani način (Slika 12a). Istaknimo dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ (Slika 12b). Prema koracima konstrukcije vrijedi: $|VA| = |VB| = |AC| = |BC|$ jer su to radijusi konstruiranih sukladnih kružnica (Slika 12c).



Slika 12. Nadopuna konstrukcije do trokuta (romba)

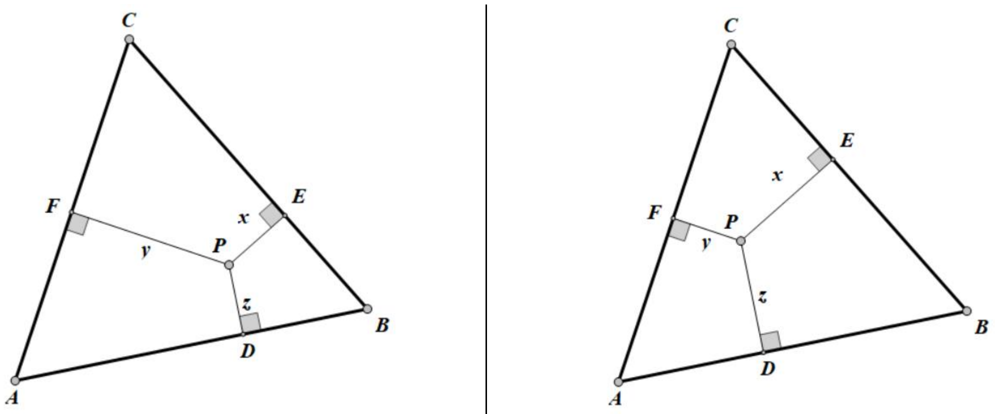
Povlačenjem dužina nastala su dva trokuta ΔVAC i ΔVCB. Trokuti su sukladni po poučku SSS jer se podudaraju u tri para stranica. Na temelju sukladnosti trokuta zaključuje se da su i odgovarajući kutovi trokuta podudarni, odnosno: $\measuredangle AVC = \measuredangle CVB$. To nadalje znači da polupravac VC dijeli polazni kut na dva podudarna kuta pa je polupravac VC simetrala promatranog kuta (Q). ■

Korisno je kada se jedna konstrukcija može višestruko iskoristiti, umjesto da se nižu slične konstrukcije i slični dokazi, jer se na taj način stvaraju veze među različitim matematičkim idejama i konceptima. U ovom slučaju, simetrala konstrukcije kuta se na prirodan način može koristit za objašnjavanje nekih svojstava romba (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010).

Prije svega, može se uočiti da je četverokut $VACB$ romb jer su mu prema koracima konstrukcije sve četiri stranice jednakih duljina. Na temelju uočene sukladnosti može se zaključiti da dijagonala $\overline{VC}$ dijeli romb na dva sukladna trokuta ΔVAC i ΔVCB, ali i da dijagonala $\overline{VC}$ raspolavlja nasuprotne kutove $\angle AVB$ i $\angle BCA$. Slično se mogu obrazložiti i druga svojstva romba.

Primjer 5 (de Villiers, 2021, str. 35). Unutar jednakostraničnog trokuta ΔABC odabrati proizvoljnu točku *P* te odrediti koliko iznosi zbroj udaljenosti točke *P* do stranica tog trokuta. Obrazložiti zašto to vrijedi.

Analiza: Neka je zadan jednakostranični trokut ΔABC i neka je *P* proizvoljno odabrana točka unutar trokuta (*P* ne pripada stranicama trokuta). Udaljenost točke od stranice trokuta određuje se kao udaljenost točke od nožišta okomice iz točke na stranicu trokuta (Slika 11). Neka su točke *E, F* i *D* nožišta okomica iz točke *P* na stranice trokuta $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom i neka je $|PE| = x, |PF| = y, |PD| = z$. Potrebno je odrediti zbroj promatranih udaljenosti, tj. $x + y + z = ?$



$x = 1.84, y = 1.74, z = 4.10$ (a)

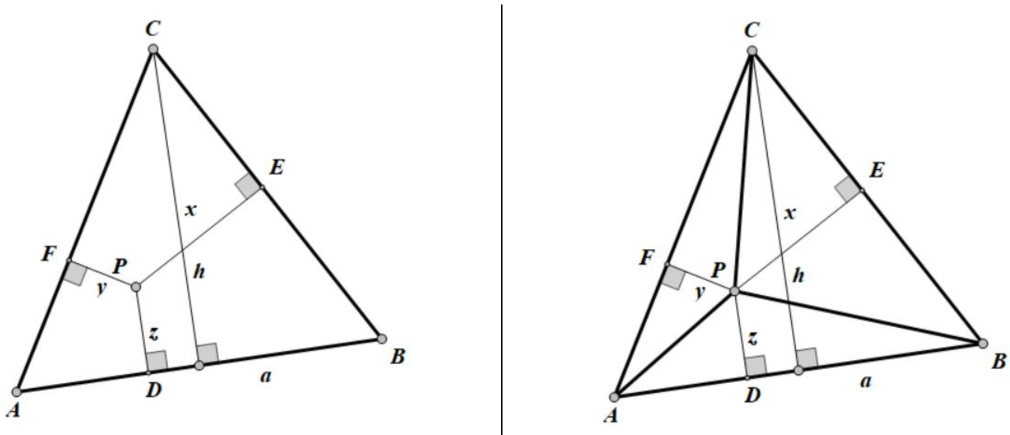
$x = 3.06, y = 2.83, z = 1.78$ (b)

Slika 13. Zbroj udaljenosti točke *P* od stranica trokuta

U jednostavnom eksperimentu, u kojem bi se izvršilo mjerenje za nekoliko različitih položaja točke *P* unutar trokuta, jednostavno bi se izveo zaključak da je za odabrani trokut zbroj traženih udaljenosti uvijek jednak, odnosno da je zbroj traženih udaljenosti konstantan broj. Na primjer, za slučaj predstavljen na Slici 13a i 13b, vrijedi: $x + y + z = 7.68$. Na temelju ova dva mjerenja vidljivo je da su udaljenosti različite, ali je zbroj udaljenosti jednak.

Međutim, na temelju induktivnog zaključivanja može se samo naslutiti da je zbroj udaljenosti uvijek konstantan, ali ne i da to vrijedi uvijek, kao i zašto to vrijedi. U svrhu razumijevanja istinitosti ove tvrdnje, potrebno je provesti deduktivno zaključivanje.

Dokaz (Metoda površine). Neka je ΔABC jednakostranični trokut, stranice duljine *a* i visine *h*. Neka je *P* proizvoljno odabrana točka unutar trokuta, a točke *E, F* i *D* nožišta okomica iz točke *P* na stranice trokuta $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom i neka je $|PE| = x, |PF| = y, |PD| = z$ (Slika 14a). Ako se točka *P* spoji dužinama s vrhovima trokuta ΔABC dobivaju se tri nova trokuta: ΔABP, ΔBCP i ΔCAP (Slika 14b).



(a) (b)

Slika 14. Trokuti i njihove ploštine

Ploština (mjera površine) trokuta ΔABC može se odrediti na dva načina: direktno po formuli te zbrajanjem ploština triju manjih trokuta, čija se ploština može odrediti po formuli. Prema tome, za ploštinu trokuta ΔABC vrijedi: $P_{\Delta BCP} + P_{\Delta CAP} + P_{\Delta ABP} = P_{\Delta ABC}$. Na temelju postavljene jednakosti, korištenjem formule za ploštinu trokuta (polovica umnoška duljine stranice i visine na tu stranicu) dobiva se: $\frac{a \cdot x}{2} + \frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot z}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$, odnosno nakon sređivanja, $x + y + z = h$. Sada je vidljivo da je zbroj udaljenosti uvijek jednak duljini visine jednakostraničnog trokuta, i da taj zbroj ne ovisi o položaju točke *P*, što znači da je zbroj promatranih udaljenosti konstantan unutar jednakostraničnog trokuta. ■

Rezultat da je zbroj udaljenosti između točke i stranica jednakostraničnog trokuta konstantan poznat je kao Vivianijev teorem. Viviani je bio student talijanskog matematičara i znanstvenika Evangelista Torricellija te pomoćnik Galilea u 17. stoljeću. U svojoj karijeri objavio je veliki broj knjiga na temu matematike i znanosti (Kolar-Begović i Ždralović, 2019).

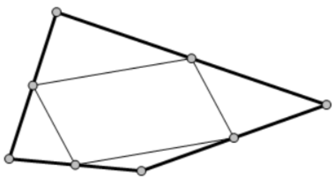
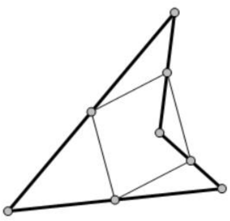
5.3. Dokaz kao sredstvo otkrivanja i postavljanja novih tvrdnji

Matematička praksa pokazuje da se do naslućivanja i postavljanja novih tvrdnji dolazi na različite načine. Ponekad se novi rezultati naslute na temelju čiste intuicije, ponekad se izvode induktivnim zaključivanjem kroz razne vrste primjera dobivenih mjerenjem, crtanjem, konstruiranjem, eksperimentiranjem i sl., a ponekad se izvode deduktivno, povezivanjem poznatih definicija, teorema ili algoritama čistim logičkim zaključivanjem, bez pribjegavanja bilo kakvom mjerenju, konstruiranju ili eksperimentiranju.

U mnogim situacijama sam dokaz može služiti kao sredstvo za istraživanje, analiziranje, otkrivanje i stvaranje novih rezultata (de Villiers, 2021). Ukoliko dokaz jasno obrazlaže zašto je neki rezultat valjan, onda upravo to može dovesti do cijelog niza naknadnog matematičkog istraživanja i novih generalizacija (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010).

Primjer 6 (de Villiers, 2021. str. 71). Odabrati proizvoljan četverokut, istaknuti polovišta njegovih stranica, a zatim istražiti kakav je četverokut koji je određen polovištima stranica polaznog četverokuta.

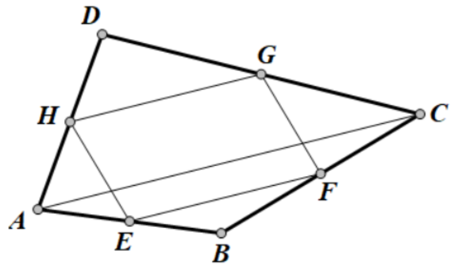
Istraživanje može započeti od općeg oblika četverokuta, konveksnog i nekonveksnog (Slika 15), a mogu se razmatrati i posebne klase četverokuta: kvadrat, pravokutnik, paralelogram, romb, trapez, jednakokračni trapez, deltoid itd. (Slika 17).

Četverokut	Tvrdnja
	Četverokut određen polovištima stranica proizvoljnog konveksnog četverokuta jest paralelogram.
	Četverokut određen polovištima stranica proizvoljnog nekonveksnog četverokuta jest paralelogram.

Slika 15. Četverokut određen polovištima stranica proizvoljnog četverokuta

Naslućivanje vrste četverokuta, koji je određen polovištima zadanog četverokuta, može se ispitati kroz niz logičkih zaključivanja, a dokaz postavljene tvrdnje za konveksni četverokut temelji se na svojstvima srednjice trokuta.

Dokaz. Neka je *ABCD* proizvoljno odabran četverokut, a *E*, *F*, *G* i *H* polovišta njegovih stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ redom. Istaknimo jednu dijagonalu četverokuta *ABCD*, npr. $\overline{AC}$ (Slika 16).



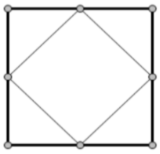
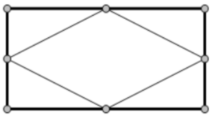
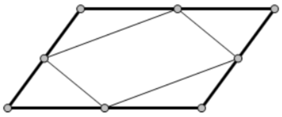
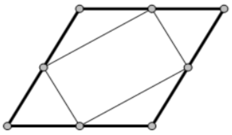
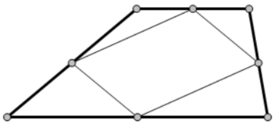
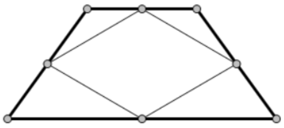
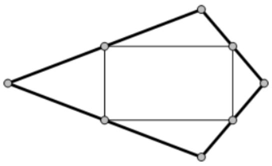
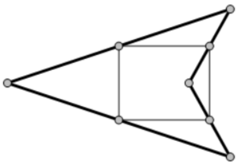
Slika 16. Istraživanje svojstava četverokuta *EFGH*

Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli četverokut ABCD na dva trokuta ΔABC i ΔACD. Točke *E* i *F* su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ΔABC pa je dužina $\overline{EF}$ srednjica tog trokuta te vrijedi: $EF \parallel AC$ i $|EF| = \frac{1}{2}|AC|$ (1). Analogno, dužina $\overline{GH}$ srednjica je trokuta ΔACD te vrijedi: $GH \parallel AC$ i $|GH| = \frac{1}{2}|AC|$ (2). Iz (1) i (2) se može zaključiti da je $EF \parallel GH$ i $|EF| = |GH|$, što znači da su u četverokutu EFGH dvije nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina pa je taj četverokut paralelogram. ■

Sličnim razmišljanjem i zaključivanjem mogu se ispitati i svojstva četverokuta koji je određen polovištima nekonveksnog četverokuta te potpuno analogno doći do zaključka da je i taj četverokut paralelogram.

Daljnje istraživanje može se nastaviti na posebnim klasama četverokuta (Slika 17). Kako bi se ispitalo da je neki četverokut kvadrat može se npr. prema definiciji ispitati ima li četverokut sve četiri stranice jednakih duljina i sva četiri kuta prava, za pravokutnik se može ispitati jesu li u četverokutu nasuprotne stranice jednakih duljina i jesu li sva četiri kuta prava, a za romb se može ispitati ima li četverokut sve četiri stranice jednakih duljina. Ali, mogu se koristiti i druge karakterizacije pojedinih četverokuta.

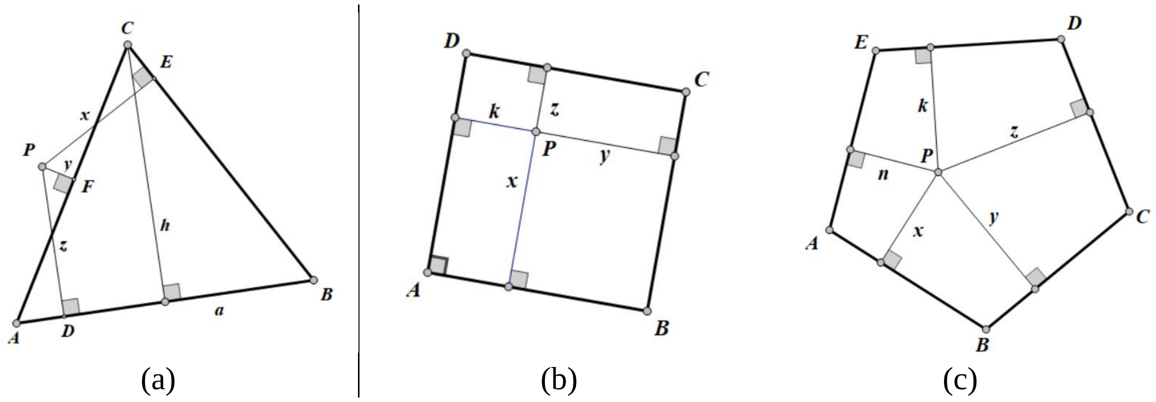
Jednakost nasuprotnih stranica može se izvoditi analogno kao u prethodnom dokazu, a mogu se koristiti i druge metode, npr. Pitagorin poučak kod kvadrata i pravokutnika. Kad god je moguće, korisno je ispitivanje provesti različitim metodama kako bi se uočila efikasnost pojedine metode. Svakako, pojedinačna istraživanja kroz proces deduktivnog zaključivanja, za svaki prikazani četverokut, prepušta se čitatelju.

Četverokut	Tvrdnja
	Četverokut određen polovištima stranica kvadrata jest kvadrat.
	Četverokut određen polovištima stranica pravokutnika jest romb.
	Četverokut određen polovištima stranica paralelograma jest paralelogram.
	Četverokut određen polovištima stranica romba jest pravokutnik.
	Četverokut određen polovištima stranica trapeza jest paralelogram.
	Četverokut određen polovištima stranica jednakokračnog trapeza jest romb.
	Četverokut određen polovištima stranica deltoida jest pravokutnik.
	Četverokut određen polovištima stranica nekonveksnog deltoida jest pravokutnik.

Slika 17. Četverokut određen polovištima stranica odabranog četverokuta

Istraživanje se može provoditi i tako da se umjesto polovišta stranica odaberu točke koje dijele stranicu u nekom omjeru, npr. $1:2$ ili $2:3$, a na kraju tih istraživanja može se izvesti opći zaključak za proizvoljni omjer $a:b$. Itd.

Slično tim vrstama istraživanja, može se nastaviti istraživanje iz tvrdnje postavljene u primjeru 5 (str. 30), gdje je pokazano da je zbroj udaljenosti neke točke *P*, koja pripada unutrašnjosti jednakostraničnog trokuta, od stranica tog trokuta konstantan, ne ovisi o položaju točke *P* i jednak je duljini visine promatranog trokuta. No, sada se istraživanje može nastaviti u raznim smjerovima te postavljati nove tvrdnje i izvoditi dokaze. Na primjer, može se istraživati što bi vrijedilo ako bi se točka *P* uzela izvan trokuta (Slika 18a) ili ako trokut ne bi bio jednakostraničan. Također, može se istražiti koja tvrdnja bi vrijedila u četverokutima, peterokutima, posebno koja tvrdnja bi vrijedila za pravilne mnogokute itd. (Slika 18b,c).



Slika 18. Istraživanje Vivijanova teorema za druge mnogokute

Dodatno istraživanje postavljene tvrdnje, variranjem uvjeta na predstavljeni način, osigurava se razvoj vještina istraživanja, naslućivanja, postavljanja tvrdnji, njihovih generalizacija te u konačnici procesa dokazivanja. Na taj način se osigurava okruženje za razvoj vještina rasuđivanja i logičkog zaključivanja, odnosno matematičkog mišljenja i matematičke pismenosti.

5.4. Dokaz kao sredstvo komunikacije

Prema de Villiersu, dokaz je jedinstven način komuniciranja matematičkih rezultata između profesionalnih matematičara, između učitelja i učenika te između samih učenika. Na taj način, dokaz postaje oblik društvene interakcije (de Villiers, 2021, str. 14).

Naime, koristeći se dokazom matematičari prezentiraju svoje ideje, bilo u pisanom obliku (npr. kroz časopise) ili verbalno (npr. na predavanjima), čime se često pokreće rasprava o valjanosti predstavljenog argumenta. Rasprava unutar matematičke zajednice kroz razne vrste komunikacija pridonosi usavršavanju dokaza, identifikaciji eventualnih pogrešaka, a ponekad i njegovom odbacivanju ukoliko se otkriju protuprimjeri (de Villiers, 2021).

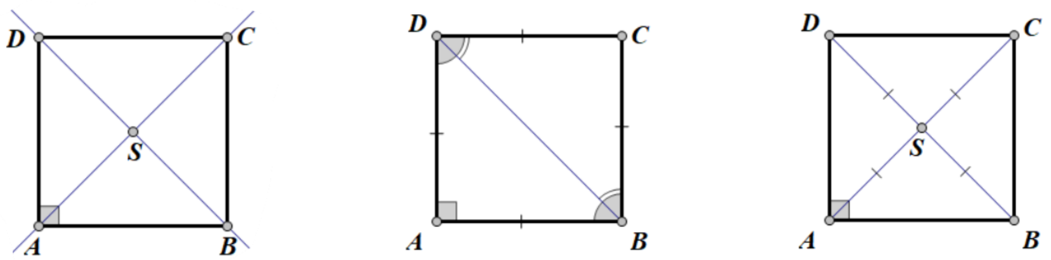
Tako na primjer, Kevin Houston u svojoj knjizi *How to Think Like a Mathematician* predlaže da se na dokaz u pisanom obliku može gledati kao na „bitku“ između čitatelja i pisca dokaza. Pisac dokaza trebao bi jasno prikazati svaki korak u dokazu i pri tome predvidjeti koja bi pitanja čitatelj mogao postaviti pa se potruditi da dokaz bude bez praznina u razumijevanju. S druge strane, čitatelj bi pri polasku kroz dokaz svaki korak trebao preispitati tako da mu bude jasno zašto to vrijedi. Na taj način, dokaz postaje „živa“ rasprava između pisca i čitatelja na način da čitatelj na svaki svoj „zašto“ pronađe odgovor u zapisu dokaza (Stefanowicz, Kyle i Grove, 2014).

U svrhu kvalitetne i jasne komunikacije, komuniciranjem kroz dokaz razvijaju se i određeni standardi komunikacije, bilo da se radi o simboličkom zapisu, jezičnom opisu (pisano ili verbalno) ili vizualnom prikazu pa je u tom smislu, dokaz vrlo koristan za učenje matematičkog jezika (Hemmi i Löfwall, 2009).

Na sličan način, dokaz se može koristiti i u nastavi matematike u svrhu razvijanja standarda komunikacije i usavršavanja matematičkog jezika. Naime, učenici slušajući učitelja kako se kroz proces dokazivanja služi valjanim i prihvatljivim argumentima, postupno usvajaju standarde komunikacije, a sudjelujući u raspravi i samostalnim provođenjem dokaza služe se usvojenim standardima, usavršavaju svoj matematički jezik (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010). Nakon takvog rada, učitelji kroz dokazne zadatke mogu provjeravati znanje učenika ne samo o korektnosti procesa dokazivanja već i o razini poštivanja određenih standarda komunikacije, kao i o razini korištenog matematičkog jezika.

Ukratko, kroz raspravu o procesu dokazivanja na nastavi matematike učenici uče komunicirati matematička znanja i usvajati odgovarajuće standarde komunikacije. U tom smislu, važno je da učitelj logičke argumente kroz deduktivno zaključivanje prenosi na način da zadovoljava matematičke standarde, ali i tako da učenicima bude razumljiv. No, s druge strane, učenici trebaju uložiti određeni napor da takav način komunikacije prate s razumijevanjem umjesto da pasivno prate proceduru koju učitelj demonstrira i uče je napamet u svrhu puke reprodukcije u provjeri znanja (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010).

Primjer 7 (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010, str. 21). Raspraviti u učionici: zašto se simetrale kutova kvadrata sijeku u jednoj točki (Slika 19a).



(a) (b) (c)

Slika 19. Rasprava u svrhu komuniciranja dokaza

Rasprava može započeti uočavanjem da dijagonala kvadrata raspolavlja nasuprotne kutove (Slika 19b). Zašto? Jer, dijagonala dijeli kvadrat na dva jednakokračna pravokutna trokuta pa su kutovi uz osnovicu jednakih veličina. Kako su ti trokuti i međusobno sukladni, to su kutovi uz osnovicu obaju trokuta svi jednakih veličina pa se može zaključiti da je dijagonala raspolovila nasuprotne kutove. Kako se radi o kvadratu, kojemu su kutovi pravi, raspolovljeni kutovi iznose po 45°. Nadalje to znači da dijagonala kvadrata pripada simetralama nasuprotnih kutova kvadrata. Slično je i s drugom dijagonalom i simetralama drugog para nasuprotnih kutova. Budući da se dijagonale sijeku u jednoj točki, to se i simetrale svih kutova kvadrata sijeku u jednoj točki.

Nakon provedene rasprave korisno je zapisati i formalni dokaz u svrhu izgradnje matematičkog jezika i razvoja standarda komuniciranja.

Dokaz. U kvadratu *ABCD*, dijagonala $\overline{BD}$ dijeli kvadrat na dva pravokutna trokuta ΔABD i ΔBCD (Slika 19b). Trokuti su sukladni po poučku *SSS* (ili *SKS*) jer imaju tri para sukladnih stranica: jedna stranica im je zajednička (dijagonala $\overline{BD}$), a preostale stranice su strance kvadrata pa su jednakih duljina: $|AB| = |CD| = |AD| = |BC|$. Kako su trokuti ΔABD i ΔBCD jednakokračni, kutovi uz osnovicu su jednakih veličina: $\measuredangle ADB = \measuredangle DBA$ i $\measuredangle BDC = \measuredangle CBD$, a kako su i sukladni, kutovi uz osnovicu jednog trokuta jednaki su kutovima uz osnovicu drugog trokuta: $\measuredangle ADB = \measuredangle BDC$ i $\measuredangle DBA = \measuredangle CBD$. To znači da dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja kutove pri vrhovima kvadrata *B* i *D*, a kako su kutovi kvadrata pravi, njihova veličina iznosi po $\frac{90°}{2} = 45°$. ■

Na sličan način, može se povesti rasprava i o tome zašto sjecište dijagonala dijeli dijagonale na jednake dijelove (Slika 19c).

Svakako je važno pri raspravljanju o procesu dokazivanja kao i pri zapisivanju formalnog dokaza, voditi računa da korišteni argumenti budu valjani, ali i prihvatljivi te učenicima razumljivi. Također, važno je da predmet rasprave ne bude odviše složen, a opet da bude dovoljno intrigantan kako bi motivirao učenike da o tome raspravljaju i teže razvijanju valjanih argumenata (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010).

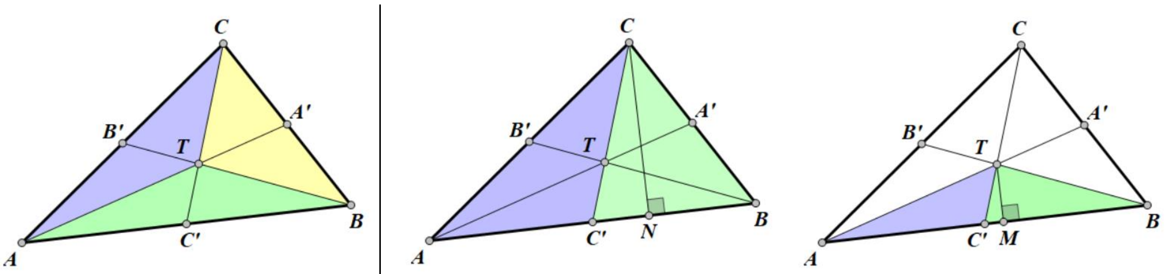
5.5. Dokaz kao sredstvo razvoja strategija

Iz svega do sada predstavljenog vidljivo je da su dokazi i različiti procesi dokazivanja zaista nositelji matematičkog znanja, a ne samo puko utvrđivanje istinitosti postavljenih tvrdnji. Tako su tvrdnje prikladne da se variraju do stvaranja različitih generalizacija, dok su druge prikladne da se objasne na različite načine i na taj način povežu znanja iz različitih područja u funkcionalnu mrežu znanja.

Neke tvrdnje su posebno prikladne da se kroz opravdavanje njihove valjanosti demonstrira točno određena strategija, a kad se valjanost tvrdnje može opravdati na različite načine onda je, osim povezivanja različitih znanja, moguće razmatrati i efikasnost jedne strategije u odnosu na drugu.

Na sličan način se tvrdnje i njihovi dokazi mogu koristiti i u nastavi matematike: neka tvrdnja će se koristiti s namjerom da se predstavi točno određena strategija, a zatim primjeni u dokazu neke druge tvrdnje, dok će se neka tvrdnja dokazivati na više različitih načina kako bi se demonstrirale različite strategije, povezalo znanje iz različitih područja u funkcionalnu mrežu znanja, ali i uočila strategija koja je efikasnija od druge u odgovarajućem kontekstu (Herbst, Miyakawa, i Chazan, 2010).

Primjer 8. Metodu površine, primijeniti kao strategiju za dokazivanje tvrdnje da težište trokuta dijeli trokut na tri trokuta jednakih ploština (Slika 20a).



$P_{\Delta ABT} = P_{\Delta BCT} = P_{\Delta CAT}$ (a) $\qquad P_{\Delta AC'C} = P_{\Delta C'BC}$ (b) $\qquad P_{\Delta AC'T} = P_{\Delta C'BT}$ (c)

Slika 20. Težište trokuta i ploštine nastalih trokuta

Metoda površine sastoji se u tome da se iz odnosa mjera površina (ploština) nekih likova dobiju odnosi među drugim mjerama promatranih likova ili među mjerama drugih likova. Metoda površine korištena je u Primjeru 5 (str. 30) pri izvođenju Vivijanovog teorema, na način da se mjera iste površine iskazala na dva načina pa se iz postavljenog odnosa izveo zaključak o promatranim udaljenostima. U ovom primjeru mjera površine se koristi na način da se iz jednakosti mjera površina dvaju trokuta izvodi zaključak o mjeri preostalih dijelova.

Dokaz. Prvo se pokaže da težišnica dijeli trokut na dva trokuta jednakih ploština (Slika 20b). Naime, težišnica $\overline{CC'}$ dijeli trokut ΔABC na trokute $\Delta AC'C$ i $\Delta C'BC$, koji imaju sukladne stranice jer je $|AC'| = |C'B|$ (zbog svojstva težišnice) i jednaku visinu $\overline{CN}$ na te stranice pa im je i ploština jednaka.

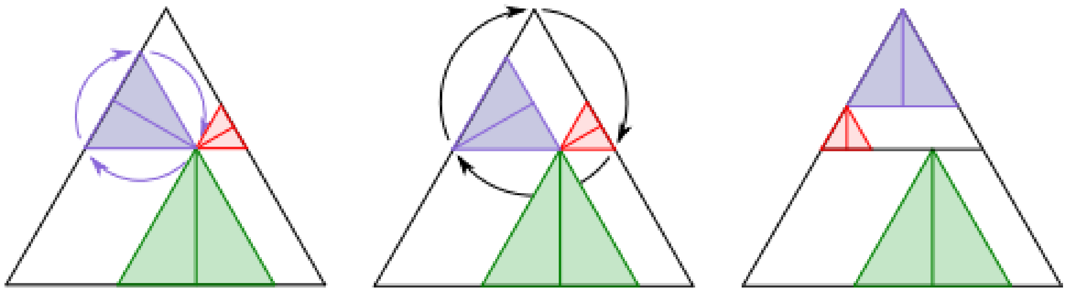
Potpuno analogno se pokaže da su i trokuti $\Delta AC'T$ i $\Delta C'BT$ jednakih ploština jer imaju sukladne stranice i jednaku visinu na te stranice.

Konačno, ako se od jednakih ploština oduzmu jednaki dijelovi, preostale ploštine će biti jednake pa vrijedi: $P_{\Delta CAT} = P_{\Delta AC'C} - P_{\Delta AC'T} = P_{\Delta C'BC} - P_{\Delta C'BT} = P_{\Delta BCT}$. Analogno se izvode zaključci i za trokute koji nastaju promatranjem preostalih težišnica, nakon čega se izvodi polazna tvrdnja: $P_{\Delta ABT} = P_{\Delta BCT} = P_{\Delta CAT}$. ■

Metoda površine je vrlo korisna metoda jer se može koristiti u raznim situacijama. Na primjer, metodu površine koristio je Euklid pri dokazivanju Taleosova poučka o proporcionalnim dužinama, ali i pri dokazivanju obrata tog poučka. Također, metodu površine koristio je de Villiers pri dokazivanju da četverokut određen polovištima stranica nekog zadanog četverokuta zauzima polovicu površine polaznog četverokuta (de Villiers, 2021, str. 88). Itd.

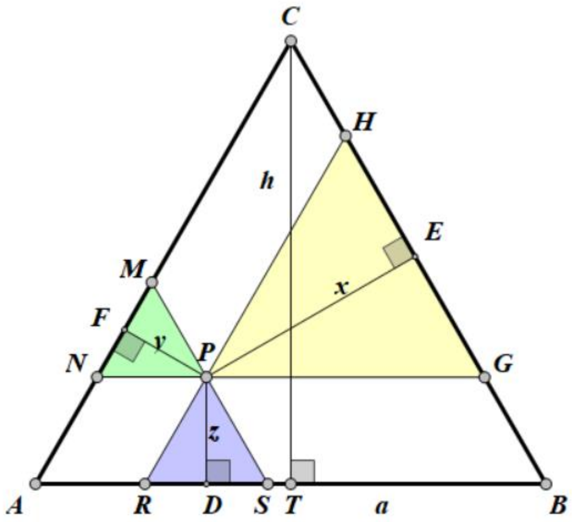
U uvodnom dijelu o smislu dokaza u matematici prikazana su tri načina dokazivanja tvrdnje o zbroju prvih *n* prirodnih brojeva (str. 20). To se može koristit u nastavi matematike na način da se ista tvrdnja dokaže na drugi način u onom trenutku kad se uvode određeni sadržaji, a onda se koristi prilika da se poveže sa već obrađenim sadržajima. Na taj način se na prirodan način stvara mreža znanja u jednu funkcionalnu cjelinu. Na primjer, dokaz Gaussovom metodom i vizualni dokaz mogu se koristiti u osnovnoškolskoj nastavi, a zatim se to može povezati sa matematičkom indukcijom u srednjoškolskoj nastavi.

Na sličan način se Vivianijev teorem može izvesti korištenjem vizualnog dokaza, koji se temelji na rotaciji i translaciji trokuta (Slika 21; Kolar-Begović i Ždralović, 2019) u trenutku kada se u nastavi geometrije obrađuju ta preslikavanja, ali i primjenom sličnosti (Slika 22) u trenutku kada se u nastavi obradi sličnost trokuta.



Slika 21. Vizualni dokaz Vivianijeva teorema

U vizualnom prikazu može se uočiti da se istaknuti manji trokuti unutar polaznog jednakostraničnog trokuta mogu zarotirati i translatirati tako da se njihovim slaganjem uoči kako njihove visine čine visinu polaznog trokuta iz čega se prirodno izvodi tvrdnja teorema.



Slika 22. Dokaz Vivianijeva teorema korištenjem sličnosti

U trokutu na Slici 22. trokuti koji su istaknuti unutar jednakostraničnog trokuta slični su polaznom trokutu jer su im kutovi podudarni (kutovi s paralelnim kracima) pa se postavljanjem omjera njihovih visina i stranica s visinom i stranicom polaznog trokuta te odgovarajućim manipulacijama s postavljenim omjerima izvodi tvrdnja teorema. Formalni dokazi prepuštaju se čitatelju.

Na temelju nekoliko opisanih primjera korištenja dokaza u svrhu razvoja različitih strategija dokazivanja, posebno s primjenom u nastavi matematike, vidljivo je kolika zaista može biti vrijednost nekog dokaza.

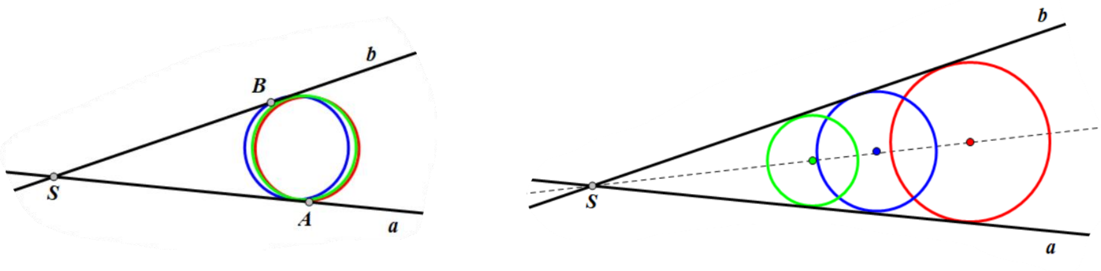
5.6. Dokaz kao sredstvo sistematizacije matematičkog znanja

Pri rješavanju raznih problema mogu se uočiti određene pravilnosti, na temelju koji se mogu izvesti tvrdnje, a koje se dalje kroz dokazivanje njihove istinitosti mogu sistematizirati u jednu funkcionalnu mrežu znanja, spremnih za daljnje korištenje, bilo u rješavanju drugih problema ili u dokazivanju novih tvrdnji.

Primjer 9 (Herbst, Miyakawa i Chazan, 2010, str. 30). Nacrtati kružnicu unutar kuta određenog ukrštenim pravcima tako da dira oba kraka kuta. Postupak crtanja argumentirati.

Rješavanju ovog problema može se pristupiti na različite načine. Prirodan put je crtanje kružnice metodom pokušaja i pogrešaka (Slika 23a). No, brzo se ustanovi da nije lako „na prvu“ odrediti točka (polu)pravca koja je ujedno i točka kružnice, a kad se i odredi točka na jednom (polu)pravcu, nije lako „na prvu“ odrediti odgovarajuću točku na drugom (polu)pravcu. Metodom pokušaja i pogrešaka možda bi se i moglo intuitivno naslutiti da bi točke A i B trebale biti na jednakoj udaljenosti od vrha kuta S, s obzirom na simetričnost kružnice. Ipak, ako se crtanje ne temelji na određenim matematičkim svojstvima, bilo po definiciji ili po izvedenoj tvrdnji, moguće je da se ne pronađe valjan put do rješenja.

Također, metodom pokušaja i pogrešaka brzo bi se moglo ustanoviti da problem ima više rješenja (Slika 23b), ali bilo bi korisno razmatrati gdje se nalaze središta kružnica koja su rješenja problema te pronaći valjano objašnjenje.

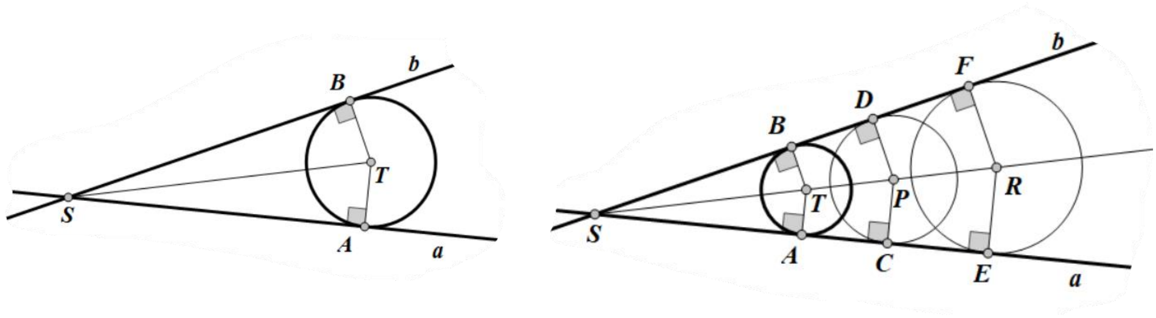


(a) (b)

Slika 23. Crtanje kružnice koja dira krakove kuta

Naslućivanja i istinitost izvedenih tvrdnji mogu se objasniti deduktivnim zaključivanjem i na taj način sistematizirati sva valjana zapažanja. Prije svega, trebalo bi osvijestiti što znači da kružnica dira (polu)pravac pa iskoristiti pripadno matematičko svojstvo.

Dokaz. Ako kružnica dira (polu)pravac onda je po definiciji taj (polu)pravac tangenta kružnice. Nadalje, tangenta na kružnicu ima svojstvo da je polumjer povučen iz točke dirališta okomit na tangentu. Crtanjem odgovarajuće slike: kružnice sa središtem T i diralištima A i B s (polu)pravcima, okomitih polumjera $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$ iz dirališta te spajanjem središta kružnice T s vrhom kuta S, dobivaju se dva trokuta ΔSTB i ΔSAT (Slika 24a). Trokuti su sukladni po poučku SSK: zajednička stranica $\overline{ST}$, polumjeri $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$ jednakih duljina i pravi kutovi $\measuredangle TAS = 90° = \measuredangle SBT$ nasuprot duljoj stranici trokuta. Iz sukladnosti slijedi podudarnost stranica $\overline{SA} \cong \overline{SB}$, što znači da se točke dirališta A i B nalaze na jednakoj udaljenosti od vrha kuta S.



(a) (b)

Slika 24. Kružnica koja dira krakove kuta

Također, iz sukladnosti promatranih trokuta slijedi podudarnost kutova pri vrhu S, $\angle AST \cong \angle TSB$, što znači da je ST simetrala kuta, odnosno da središte promatrane kružnice pripada simetrali kuta. Razmatranjem drugih kružnica unutar kuta koje diraju oba (polu)pravca kuta zaključuje se da i njihova središta pripadaju simetrali kuta. Kako kut ima samo jednu simetralu, onda su središta svih kružnica kolinearna. ■

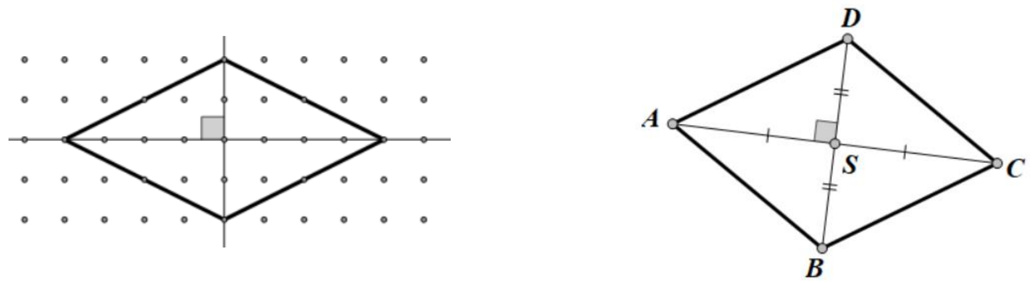
Ista problematika može se razmatrati i iz perspektive tangenti na kružnicu povučenih iz točke izvan kružnice. U tom slučaju se dolazi do zaključka da su odsječci tangenti od dirališta s kružnicom do točke izvan kružnice jednakih duljina. Na taj način dokaz je služio kao sredstvo sistematizacije rezultata koji su uočeni tijekom rješavanja problema.

Općenito, dokaz kao sredstvo sistematizacije služi za deduktivnu organizaciju raznih svojstava matematičkih pojmova, odnosno tvrdnji postavljenih o svojstvima pojmova i njihovim vezama. Naime, matematička teorija se aksiomatskom metodom izgrađuje u deduktivni sustav aksioma, definicija i teorema, a kroz formalni dokaz izvedenih tvrdnji, odgovarajuće definicije, aksiomi i teoremi logički se povezuju u funkcionalnu mrežu znanja.

Stoga se dokaz može smatrati kao neizostavni alat u sistematiziranju različitih rezultata unutar deduktivnog sustava definicija, aksioma i teorema (de Villiers, 2021).

Glavna svrha sistematiziranja raznih tvrdnji jest identificiranje i otklanjanje eventualnih nedosljednosti, cirkularnih argumenata, skrivenih pretpostavki te stvaranje globalnog pogleda na odgovarajući koncept sa svim mogućim vezama u svrhu ekonomične primjene, bilo u svrhu rješavanja problema, bilo u dokazivanju novih tvrdnji.

Primjer 10 (de Villiers, 2021, str. 139). Istražiti svojstva romba, zatim postaviti odgovarajuću definiciju i izvesti tvrdnje o preostalim svojstvima.



(a) (b)

Slika 25. Sistematiziranje svojstava romba

Smještanjem romba u kvadratnu točkastu mrežu lako se otkriju njegova svojstva vezana za stranice, kutove, dijagonale itd. Tako se na temelju Slike 25(a) može uočiti da romb ima sljedeća svojstva:

- Sve stranice su jednakih duljina.
- Nasuprotne stranice su paralelne.
- Dijagonale su okomite.
- Dijagonale se raspolavljaju.
- Dijagonale raspolavljaju nasuprotne kutove.
- Postoje dvije osi simetrije, kroz parove nasuprotnih kutova.
- Nasuprotni kutovi su podudarni.
- Susjedni kutovi su suplementarni. Itd.

Nakon što se uoče i opišu svojstva romba, neka od njih se odabiru radi postavljanja definicije, a preostala svojstva i njihove veze iskazuju se kroz tvrdnje čija se istinitost treba opravdati deduktivnim zaključivanjem, tj. dokazom. Svojstva odabrana za definiciju trebaju biti nužna i dovoljna kako bi jednoznačno odredila pojam, a istinitost izvedenih tvrdnji treba slijediti na temelju postavljene definicije.

Uobičajena praksa definiranja romba u nastavi matematike jest reći: *Romb je četverokut kojemu su sve stranice jednakih duljina*. Međutim, definicija je stvar dogovora, što znači da se romb može definirati korištenjem i drugih svojstava, ali onda je potrebno pokazati da ostala svojstva logički slijede iz te definicije.

Na primjer, za definiciju romba može se uzeti: *Romb je četverokut s okomitim dijagonalama, koje se međusobno raspolavljaju* (Slika 25b). Na temelju te definicije mogu se izvesti sljedeći poučci:

Poučak 1. Sve stranice romba su jednakih duljina.

Poučak 2. Nasuprotne stranice romba su paralelne.

Poučak 3. Dijagonale romba raspolavljaju nasuprotne kutove.

Poučak 4. Dijagonale romba su osi simetrije. Itd.

Istinitost tvrdnje iz Poučka 1 slijedi iz sukladnosti trokuta $\Delta ABS, \Delta BCS, \Delta CDS$ i ΔDAS, a tvrdnje iz Poučka 3 iz sukladnosti trokuta ΔABC i ΔCDA te trokuta ΔABD i ΔBCD. Istinitost tvrdnje iz Poučka 2 slijedi iz svojstva sukladnosti kutova uz presječnicu, a tvrdnje iz Poučka 4 direktno iz definicije. Formalni dokazi se prepuštaju čitatelju.

6. Teškoće u procesu dokazivanja

Proces dokazivanja prilično je sličan procesu rješavanja problema te se znanja i vještine jednog procesa mogu prenijeti na drugi proces (Hemmi i Löfwall, 2009). Proces rješavanja problema Polya, u svojoj knjizi *Kako ću riješiti matematički zadataka* (Polya, 1966) razmatra kroz četiri faze, što se može prenijeti i na proces dokazivanja (Tablica 2).

Tablica 2. Proces rješavanja problema i proces dokazivanja

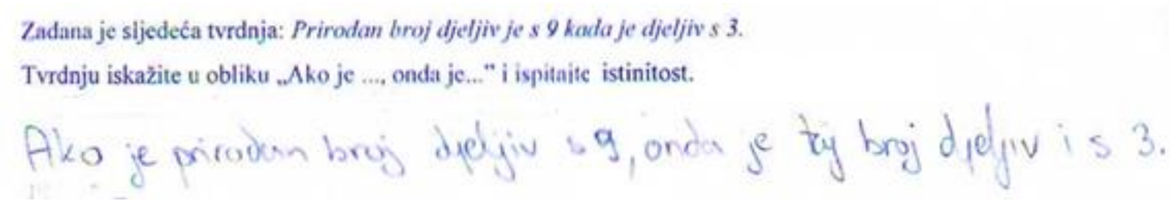
	Proces rješavanja problema	Proces dokazivanja
Razumijevanje	Prepoznati zadane elemente, uvjete te elemente koje treba odrediti. Vizualno prikazivanje, povezivanje teksta i skice itd.	Prepoznati što je pretpostavka (P), a što zaključak (Q) te što treba dokazati, tj. na temelju čega izvesti zaključak (Q).
Planiranje	Osmisliti „grubi“ plan puta rješavanja, odabrati strategiju, jednakost, formulu itd.	Osmisliti „grubi“ plan procesa dokazivanja, odabrati odgovarajuće definicije i svojstva pojmova, uočiti sukladnost, jednakost itd.
Izvršavanje plana	Provesti račun, primijeniti formulu itd. u svrhu određivanja skupa rješenja.	Izgraditi logički slijed definicija, aksioma i teorema u svrhu utvrđivanja istinitosti zaključka Q.
Osvrt	Provjeriti korektnost i smislenost rješenja, postoji li još neko rješenje, neki drugi put određivanja rješenja itd.	Provjeriti korektnost zaključka o istinitosti tvrdnje, eventualno postojanje nedosljednosti, cirkularnih argumenata itd.

Nastavna praksa pokazuje da, upravo nepoštivanje ovog slijeda rješavanja problema, odnosno procesa dokazivanja, stvara teškoće i nemogućnost uspješnog otkrivanja konačnog rješenja odnosno formiranje valjanog logičkog argumenta kojim se potvrđuje istinitost tvrdnje. U nastavku se daju primjeri koji to potvrđuju, a uzeti su iz pisanih provjera znanja studenata Učiteljskog studija u Splitu iz kolegija Matematike 1 i Matematike 2, kroz nekoliko različitih generacija.

Teškoća 1. Teškoće vezane uz razumijevanje iskaza tvrdnje

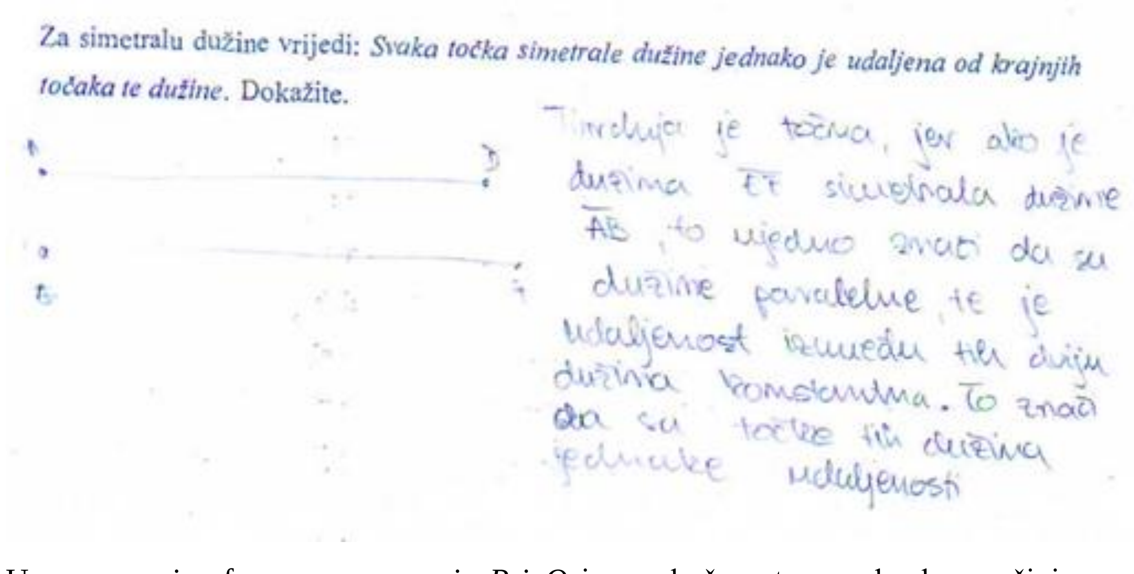
Proces dokazivanja započinje prepoznavanjem što je pretpostavka (*P*), a što zaključak (*Q*) u danoj tvrdnji kako bi se mogao graditi logički slijed, direktno od pretpostavke *P*, prema zaključku *Q* ili indirektno od negacije zaključka ¬*Q*. U nekim situacijama, ova faza se preskače, a u nekim situacijama se *P* i *Q* pogrešno identificiraju.

Primjer 1. Pogrešno identificiranje *P* i *Q*



U prikazanom zapisu vidljivo je pogrešno identificiranje pretpostavke (*P*) i zaključka (*Q*), što znači da tvrdnja iskazana riječima nije jasna. U tom slučaju ni istinitost tvrdnje nije moguće ispitati, a posljedično ni dokazati.

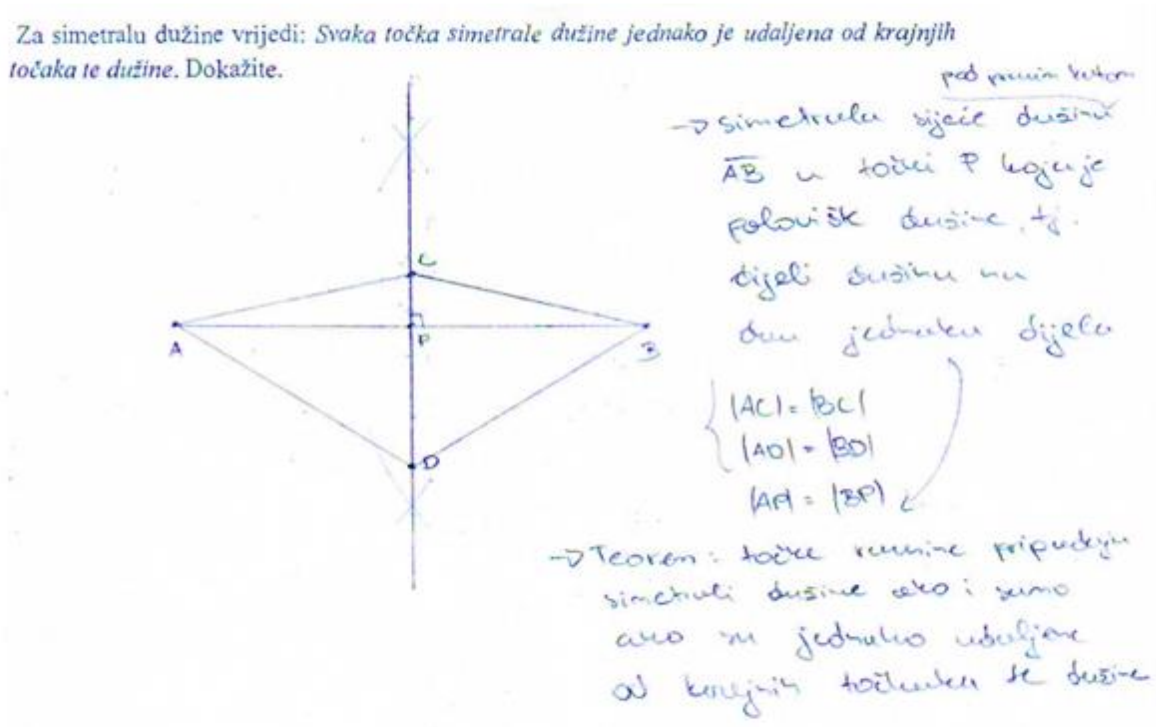
Primjer 2. Ne razumijevanje pojmova i njihovih svojstava



U ovom zapisu faza prepoznavanja *P* i *Q* je preskočena te se odmah započinje sa stvaranjem niza zaključaka, a dodatni problem je nepoznavanje pojma *simetrale dužine,* umjesto kojeg se koristi pojam *paralelnosti dvaju pravaca*.

Osnovni preduvjet stvaranja logičkog slijeda zaključaka u svrhu izvođenja dokaza jest poznavanje pojmova, njihovih definicija i drugih svojstava. Ukoliko poznavanje odgovarajućih pojmova izostane, uočava se sklonost pisanja bilo čega što ima bilo kakve sličnosti sa zadanim.

Primjer 3. Nerazumijevanje procesa dokazivanja



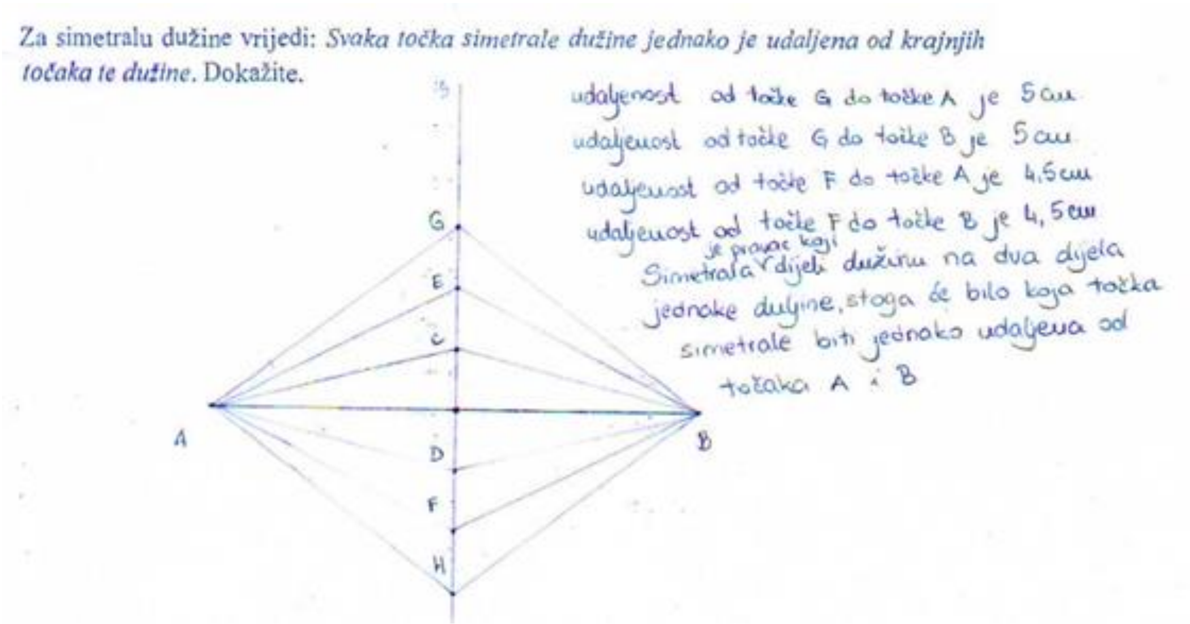
Iz predstavljenog zapisa vidljivo je poznavanje pojma *simetrale dužine*, kao i svojstva *polovišta dužine*, služenje vizualnim prikazom i simboličkim zapisom. Umjesto stvaranja niza logičkog zaključivanja u svrhu utvrđivanja istinitosti zadane tvrdnje, tvrdnja se ponovno iskazuje u obliku teorema, koji je dan u obliku ekvivalencije, što ukazuje na to da sam proces dokazivanja nije jasan, kao ni značenje dokaza. U tom slučaju, zapravo se ispisuje ono što se zna o ključnim pojmovima.

Teškoća 2. Teškoće vezane uz značenje deduktivnog zaključivanja

Ukoliko smisao aksiomatske metode i deduktivnog zaključivanja nije jasan, proces dokazivanja zasniva se na konkretnim primjerima, na temelju kojih se istinitost može samo naslutiti, ali ne i dokazati.

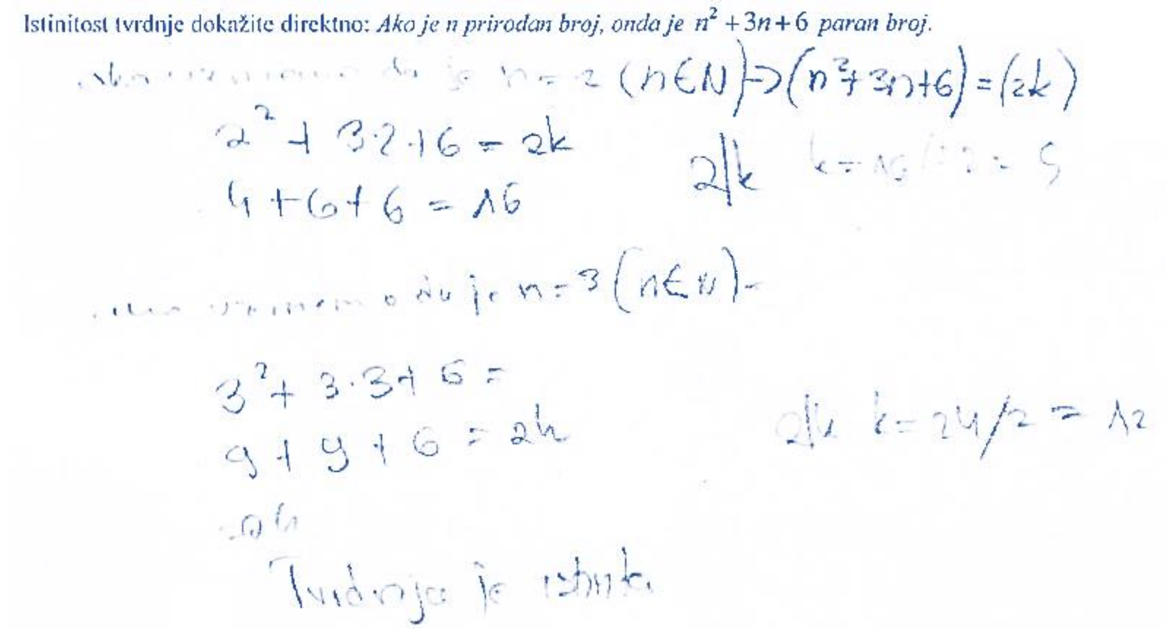
Primjer 4. Dokazivanje temeljeno na primjeru

Iako nije posebno istaknuto, iz zapisa je vidljivo jasno identificiranje pretpostavke P i zaključka Q kojeg treba izvesti. Također, iz vizualnog prikaza vidljivo je poznavanje pojma simetrale dužine, ali se iz zapisa uočava nepotpunost definicije. Na neki način, vidljiva je i jasna struktura procesa dokazivanja, ali se proces zaključivanja temelji na nizu primjera i mjerenju umjesto na logičkom povezivanju aksioma, definicija ili ranije dokazanih tvrdnji (u ovom slučaju sukladnosti odgovarajućih trokuta).



Primjer 5. Dokazivanje temeljeno na primjeru kroz slučajeve

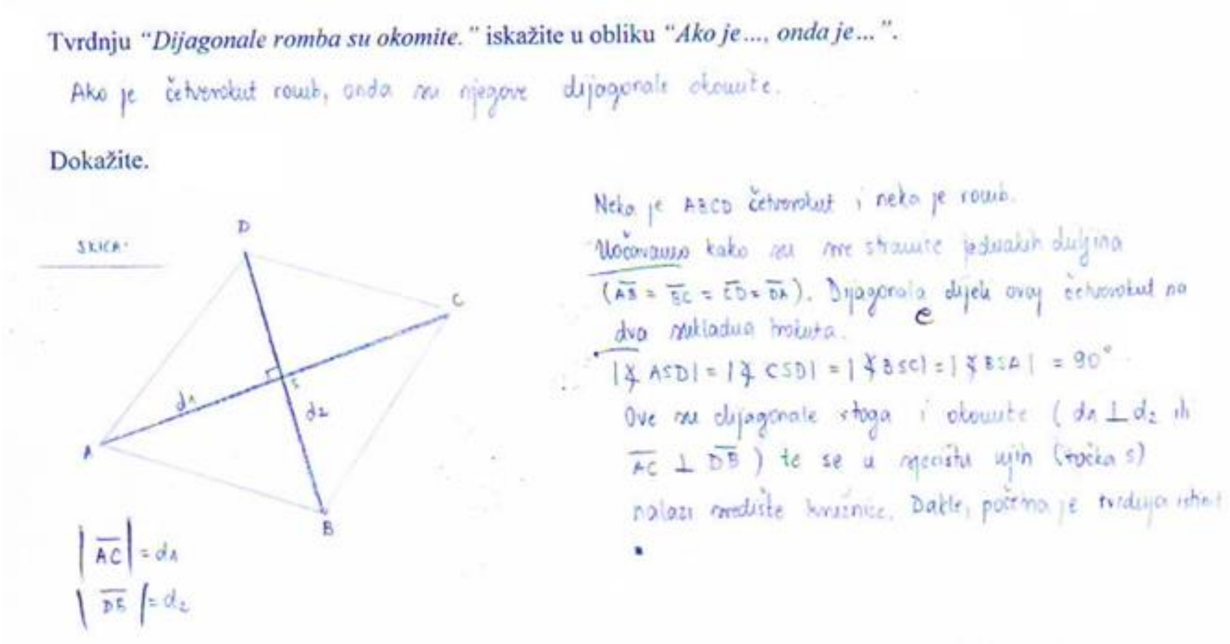
Slično kao u prethodnom primjeru (primjer 3), uočava se jasan proces dokazivanja razmatranjem dvaju slučajeva, kada je prirodan broj paran i kada je neparan i vidljivo je znanje svojstva parnosti, ali se proces dokazivanja temelji na primjerima.



Teškoća 3. Stvaranje cirkularnog argumenta

Tipična greška u procesu dokazivanja jest korištenje zaključka *Q* unutra logičkog slijeda zaključivanja pri utvrđivanju istinitosti upravo tog zaključka *Q*.

Primjer 6. Korištenje zaključka u procesu dokazivanja


Tvrdnju "*Dijagonale romba su okomite.*" iskažite u obliku "*Ako je…, onda je…*".

Ako je četverokut romb, onda su njegove dijagonale okomite.

Dokažite.

SKICA:

$|\overline{AC}| = d_1$

$|\overline{DB}| = d_2$

Neka je ABCD četverokut i neka je romb.
Uočavamo kako su sve stranice jednakih duljina ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$). Dijagonala dijeli ovaj četverokut na dva sukladna trokuta.
$|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle BSA| = 90°$
Ove su dijagonale stoga i okomite ($d_1 \perp d_2$ ili $\overline{AC} \perp \overline{DB}$) te se u sjecištu njih (točka S) nalazi središte kružnice. Dakle, početna je tvrdnja istinit

U prikazanom zapisu vidljivo je razumijevanje iskaza tvrdnje, identificiranje *P* i *Q*, vješto formuliranje tvrdnje u standardnom obliku te jasnoća direktnog dokazivanja. Međutim, u procesu utvrđivanja istinitosti zaključka *Q* (okomitost dijagonala), koristi se upravo to svojstvo.

Teškoća 4. Izvođenje nekorektnog zaključka

Tipična greška koja se pojavljuje u procesu dokazivanja pri utvrđivanju istinitosti zadane tvrdnje jest izvođenje zaključka da tvrdnja nije istinita, što je zapravo logička greška. Također, često je cilj doći što prije do konačnog zaključka pa se on izvodi iz svakojakih procesa: pogrešnih, nepotpunih, nedovršenih.

Primjer 7. Logička greška u zaključivanju

Istinitost tvrdnje dokažite indirektno po kontrapoziciji: *Ako je* a^2+3a+7 *paran broj, onda je a neparan broj.*

a^2+3a+7 = paran broj, a = neparan

$1^2+3\cdot 1+7=11$

$3^2+3\cdot 2+7=22$

$4^2+3\cdot 4+7=35$

$2^2+3\cdot 2+7=17$

$5^2+3\cdot 5+7=47$

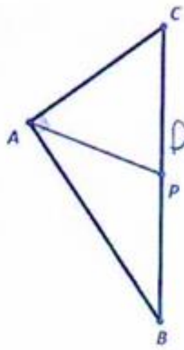
$6^2+3\cdot 6+7=61$

Tvrdnja nije istinita.

Iz predloženog zapisa, prije svega vidljivo je nepoznavanje značenja kontrapozicije, a sam proces zaključivanja, kojim se provjerava istinitost tvrdnje: *Ako je a neparan, onda je vrijednost izraza paran*, i koja nije istinita, zasniva se na primjerima. No, pri uvrštavanju primjera dogodila se pogreška te je vrijednost u tom slučaju paran broj (22), a u drugim slučajevima neparan broj. Na temelju primjera izvodi se konačan zaključak *Tvrdnja nije istinita*, iako se tražilo da se dokaže istinitost.

Primjer 8. Zaključak izveden na nekorektnom procesu

Dokazati da je trokut ΔABP sa slike jednakokračan, ako znamo da je $\overline{AP}$ težišnica trokuta ΔABC.



Ako je $\overline{AP}$ težišnica ΔABC, tada znamo da točka P raspolavlja dužinu $\overline{BC}$. Prema tome $|BP|=|PC|$.
Dužina $\overline{AP}$ je zajednička stranica trokutima ΔAPC i ΔABP.

Prema poučku SKS ta dva trokuta ΔAPC i ΔABP se podudaraju u dvjema stranicama (AP zajednička, a $|CP|=|BP|$ te u kutu ;

Prema tome trokut ΔABP je jednakokračan.

Iako bi se iz zapisa moglo zaključiti da su P i Q korektno identificirane i da je proces dokazivanja jasan, sam proces stvaranja logičkog niza zaključaka je pogrešan i nepotpun, ali ipak jest osnova za izvođenje zaključka Q da je trokut jednakokračan.

Naime, u procesu se želi pokazati da su trokuti sukladni pa iz sukladnosti zaključiti jednakost stranica što je svojstvo jednakokračnih trokuta, ali promatrani trokuti nisu sukladni i jednakost stranica se ne može izvesti na taj način pa sve i da jesu sukladni.

Predstavljeni primjeri i teškoće, koje su na temelju njih opisne, samo je izbor među mnogim teškoćama koje se javljaju u procesu dokazivanja i nikako nije potpuna klasifikacija svih teškoća. No, opisane teškoće svakako su tipične, koje se javljaju kada znanja o procesu dokazivanja nisu dostatna i kada ne postoje osnovne vještine dokazivanja.

7. Zaključak

Tema ovoga diplomskog rada je *Smisao matematičkog dokaza*. U radu se nastojalo opisati koji smisao dokaz ima u matematici kao znanstvenoj disciplini te koji smisao ima u nastavi matematike.

Iako je dugo vremena dominirao stav da je glavna uloga dokaza, kako u matematici tako i u nastavi matematike, utvrđivanje istinitosti izvedenih tvrdnji, vremenom se pokazalo da su oni zapravo glavni nositelji matematičkog znanja. Moglo bi se reći da su za razvoj matematike važniji dokazi od teorema jer se opravdavanjem istinitosti izvedenih tvrdnji kroz proces dokazivanja stvara cijela mreža znanja unutar deduktivnog sustava definicija, aksioma i teorema pa i u situacijama kada se istinitost nekog naslućivanja ili izvedene tvrdnja ne uspijeva dokazati. Stoga je neosporno da dokaz igra veoma važnu ulogu u matematici, ali unatoč tome, dokaz se u nastavi matematike ne koristi u dovoljnoj mjeri.

Istraživanja u obrazovanju pokazuju da se uloga dokaza u nastavi matematike mijenja u odnosu na ulogu u matematici jer ovisi o prilagodbi procesa dokazivanja uzrastu učenika, odnosno njihovom predznanju. Tako se dokazi mogu provoditi već u primarnom obrazovanju, ali više na intuitivnoj razini, postavljanjem tvrdnji kroz induktivno zaključivanje te objašnjavanjem i argumentiranjem jezikom primjerenim tom uzrastu. No, usvajanjem novih znanja te razvojem matematičkog jezika i vještina dokazivanja, proces dokazivanja s učenicima može biti sve više formalan i provoditi se deduktivnim zaključivanjem.

U tom procesu razvoja dokaza od intuitivne do formalne razine, pokazano je kako se dokaz može koristiti na različite načine: kao sredstvo provjere ili uvjerenja u istinitost tvrdnje, objašnjenja istinitosti tvrdnje, otkrivanja i postavljanja novih tvrdnji, komunikacije, sistematizacije matematičkog znanja itd. Upravo različitim ulogama dokaza ostvaruje se glavna zadaća nastave matematike: razvijanje logičkog mišljenja, rasuđivanja i zaključivanja.

Kako bi se različite uloge dokaza mogle u većoj mjeri koristiti u nastavi matematike bilo bi važno da one budu vidljive kroz matematički kurikulum te udžbenike i drugi nastavni materijal, a nastavnici svjesni različitih mogućnosti procesa dokazivanja.

8. Literatura

[1] Baranović, N. (2015). *Osnove matematičke logike*. Web predavanje. Dostupno na: https://www.ffst.unist.hr/izdavastvo/predavanja.

[2] Baranović, N. (2018). Aksiomatska izgradnja matematičke teorije. Interna skripta. Filozofski fakultet. Split

[3] Courant, R., Robbins, H. & Stewart, I. (1996). *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and metods*. New York: Oxford University press.

[4] de Villiers, M. (2021). *Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketchpada i drugi tekstovi*. Zagreb: Hrvatska udruga nastavnika istraživača.

[5] Hammack, R. (2013). *Book of proof*. Virginia Commonwealth University: Virginia.

[6] Hemmi, K. i Löfwall, C. (2009). *Why do we need proof.*

[7] Herbst, P., Miyakawa, T. i Chazan, D. (2010.). *Revisiting the functions of proof in mathematics classrooms: A view from a theory of instructional exchanges*.

[8] Jozić, N. (2014). Formuliranje matematičkih definicija i iskaza teorema u svrhu kritičkog promišljanja i zaključivanja, U zborniku radova *Četvrti simpozijum „Matematika i primene"*, Beograd: Matematički fakultet, str. 54-67

[9] Kolar-Begović, Z., i Ždralović, V. (2019). *Vivianijev teorem*. Osječki matematički list, 19(1), 31-41.

[10] Kurnik, Z. (2000). *Poučak ili teorem*. Metodika: časopis za teoriju i praksu metodikâ u predškolskom odgoju, školskoj i visokoškolskoj izobrazbi, 101-105.

[11] Kurnik, Z. (2001). *Dokaz*. Metodika: časopis za teoriju i praksu metodikâ u predškolskom odgoju, školskoj i visokoškolskoj izobrazbi, 149-155.

[12] Kurnik, Z. (2013). *Oblici matematičkog mišljenja*. Element: Zagreb.

[13] Nelson, R. B. (1993). *Proofs Without Words*, Mathematical Association of America.

[14] Polya, G. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Školska knjiga.

[15] Rocha, H. (2019). *Mathematical proof: from mathematics to school mathematics*. Philosophical Transactions of the Royal Society A , 377 (2140), 20180045.

[16] Stefanowicz, A., Kyle, J. i Grove, M. (2014). *Proofs and Mathematical Reasoning*. Sveučilište u Birminghamu.

Sažetak

U svrhu otkrivanja različitih uloga dokaza, u radu se najprije razmatraju karakteristike aksiomatske izgradnje matematičke teorije, značenje samog pojma dokaza te načini procesa zaključivanja i dokazivanja. Zatim se razmatra smisao dokaza u matematici kao znanstvenoj disciplini te smisao dokaza u matematici kao nastavnom predmetu. Na kraju se ukazuje na teškoće koje se javljaju u procesu dokazivanja.

U aksiomatskoj izgradnji bilo koje matematičke discipline započinje se odabirom osnovnih pojmova te formuliranjem osnovnih tvrdnji (aksioma) o tim pojmovima. Na temelju grupe odabranih osnovnih pojmova i tvrdnji postupno se izvode novi pojmovi koje je potrebno definirati, kao i nove tvrdnje čiju je istinitost potrebno dokazati. Dokaz podrazumijeva kroz konačan niz korektnih logičkih zaključivanja, koji se temelje na aksiomima, definicijama ili ranije dokazanim tvrdnjama i kojima se uz uvažavanje zadane pretpostavke (P) utvrđuje istinitost postavljenog zaključka (Q). Sam proces dokazivanja može biti direktan ili indirektan.

Matematičarima je dokaz dugo vremena isključivo služio za utvrđivanje istinitosti određenih tvrdnji, no razvojem matematike kao znanosti pokazalo se da je smisao matematičkog dokaza puno širi jer dokaz može služiti kao sredstvo provjere ili uvjerenja u istinitost tvrdnje, objašnjenja istinitosti tvrdnje, otkrivanja i postavljanja novih tvrdnji i generalizacija, komunikacije, sistematizacije matematičkog znanja itd.

Smisao dokaza u nastavi matematike može se ostvarivati na sličan način kao i u matematici, ali način provođenja dokaza ovisi o uzrastu učenika i njihovom predznanju te cilju koji se želi postići. Tako se dokaz u primarnom obrazovanju može provoditi više na intuitivnoj razini, postavljanjem tvrdnji kroz induktivno zaključivanje te objašnjavanjem i argumentiranjem jezikom primjerenim toj dobi i znanju učenika. Usvajanjem novih znanja i razvojem matematičkog jezika tijekom matematičkog obrazovanja intuitivni pristup se postupno nadograđuje formalnim argumentiranjem i deduktivnim zaključivanjem kroz različite uloge dokaza sve do formalnog dokaza, što se detaljnije razmatra u poglavlju *Smisao matematičkog dokaza u nastavi matematike.*

Neosporno je da kroz proces dokazivanja učenici imaju mogućnost razvijati sposobnost logičkog razmišljanja, prosuđivanja i zaključivanja što je ujedno i glavna zadaća matematike kao nastavnog predmeta, a sve u svrhu primjene tih znanja, vještina i umijeća u svakodnevnom životu i radu. Stoga bi dokaz trebao biti neizostavan i u nastavi matematike.

Ključne riječi: aksiom, definicija, teorem, dokaz, smisao matematičkog dokaza

THE MEANING OF MATHEMATICAL PROOF

Abstract

In order to reveal the different roles of proof, the paper first considers the characteristics of the axiomatic construction of a mathematical theory, the meaning of the concept of proof itself, and the methods of the process of inference and proof. Then, the meaning of proof in mathematics as a scientific discipline and the meaning of proof in mathematics as a subject are considered. At the end, the difficulties that arise in the process of proof are pointed out.

The axiomatic construction of any mathematical discipline begins with the selection of basic concepts and the formulation of basic statements (axioms) about these concepts. Based on a group of selected basic terms and statements, new terms that need to be defined are gradually derived, as well as new statements whose truth needs to be proven. Proof implies through a finite series of correct logical conclusions, which are based on axioms, definitions or previously proven statements and which, while respecting the given assumption (P), establish the truth of the set conclusion (Q). The proof process itself can be direct or indirect.

For mathematicians, for a long time, the proof exclusively served to determine the truth of certain statements, but with the development of mathematics as a science, it turned out that the meaning of a mathematical proof is much broader, because a proof can serve as a means of checking or believing in the truth of a statement, explaining the truth of a statement, discovering and setting new statements and generalization, communication, systematization of mathematical knowledge, etc.

The meaning of proofs in mathematics lessons can be realized in a similar way as in mathematics, but the way of carrying out the proofs depends on the age of the students and their prior knowledge and the goal to be achieved. Thus, proof in primary education can be implemented more on an intuitive level, by making statements through inductive reasoning and by explaining and arguing in language appropriate to the age and knowledge of the students. With the acquisition of new knowledge and the development of mathematical language during mathematics education, the intuitive approach is gradually upgraded with formal argumentation and deductive reasoning through different roles of proof up to formal proof, which is discussed in more detail in the chapter: *The meaning of mathematical proof in mathematics teaching*.

It is undeniable that through the process of proof, students have the opportunity to develop the ability to think logically, judge and conclude, which is also the main task of mathematics as a subject, and all for the purpose of applying these knowledge, skills and abilities in everyday life and work. Therefore, the proof should be indispensable in the teaching of mathematics.

Key words: axiom, definition, theorem, proof, the meaning of mathematical proof

SVEUČILIŠTE U SPLITU

FILOZOFSKI FAKULTET

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

kojom ja ___Mia Šerić___ , kao pristupnik/pristupnica za stjecanje zvanja __ magistrice primarnoga obrazovanja s pojačanim modulom informacijsko-komunikacijske tehnologije u učenju i poučavanju , izjavljujem da je ovaj završni/diplomski rad rezultat isključivo mojega rada, da se temelji na mojim istraživanjima i oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i literatura. Izjavljujem da ni jedan dio završnoga/diplomskoga rada nije napisan na nedopušten način, odnosno da nije prepisan iz necitiranoga rada, stoga ne krši ničija autorska prava. Također izjavljujem da nijedan dio ovoga završnoga/diplomskoga rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Split, 21. rujna 2022.

Potpis

Mia Šerić

IZJAVA O POHRANI ZAVRŠNOGA/DIPLOMSKOGA RADA (PODCRTAJTE ODGOVARAJUĆE) U DIGITALNI REPOZITORIJ FILOZOFSKOGA FAKULTETA U SPLITU

Student/Studentica: Mia Šerić

Naslov rada: Smisao matematičkog dokaza

Znanstveno područje: Matematika

Znanstveno polje: Obrazovne znanosti

Vrsta rada: Diplomski rad

Mentor/Mentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): v. pred. Nives Baranović, prof.

Komentor/Komentorica rada (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime): /

Članovi Povjerenstva (akad. stupanj i zvanje, ime i prezime):

1. doc. dr. sc. Lada Maleš, predsjednica
2. v. pred. Nives Baranović, prof., član
3. v. pred., Željka Zorić, prof., član

Ovom izjavom potvrđujem da sam autor/autorica predanoga završnoga/diplomskoga rada (zaokružite odgovarajuće) i da sadržaj njegove elektroničke inačice potpuno odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada. Slažem se da taj rad, koji će biti trajno pohranjen u Digitalnom repozitoriju Filozofskoga fakulteta Sveučilišta u Splitu i javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama *Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju*, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15, 131/17), bude:

a) u otvorenom pristupu
b) dostupan studentima i djelatnicima FFST-a
c) dostupan široj javnosti, ali nakon proteka 6 mjeseci / 12 mjeseci / 24 mjeseca (zaokružite odgovarajući broj mjeseci).

(zaokružite odgovarajuće)

U slučaju potrebe (dodatnoga) ograničavanja pristupa Vašemu ocjenskomu radu, podnosi se obrazloženi zahtjev nadležnomu tijelu u ustanovi.

Mjesto, nadnevak: Split, 21. rujna 2022.

Potpis studenta/studentice:

Mia Šerić